Circuitos Digitais
Álgebra de Boole

Álgebra de Boole (ou Booleana)

- Desenvolvida pelo matemático britânico George Boole para estudo da lógica.
- Definida sobre um conjunto de dois elementos:

(falso, verdadeiro) (0, 1) (baixo, alto)

- Seus elementos, a princípio, não tem significado numérico.
- Postulados: se x é uma variável booleana então:
  - Se $x \neq 0 \Rightarrow x = 1$
  - Se $x \neq 1 \Rightarrow x = 0$

Álgebra de Boole: funções

- Uma variável booleana só pode assumir apenas um dos valores possíveis (0 e 1)
- Uma ou mais variáveis e operadores podem ser combinados formando uma função lógica
  - $Z_1(A) = f(A) = ...$ (expressão usando var. A)
  - $Z_2(A,B) = f(A,B) = ...$ (expr. usando var. A e B)
- Resultados de uma função lógica podem ser expressos numa tabela relacionando todas as combinações possíveis dos valores que suas variáveis podem assumir e seus resultados correspondentes: a Tabela-Verdade.

Álgebra de Boole: Tabela Verdade

Variáveis — Função Lógica

Lista das combinações possíveis dos estados das variáveis de entrada

A	B	Z=f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Resultados da função lógica para cada combinação dos estados de entrada

- Tabela-Verdade relaciona os resultados (saída) de uma função lógica para todas as combinações possíveis de suas variáveis (entrada).
- Na Tabela-Verdade acima a função lógica Z possui duas variáveis A e B, sendo Z = f(A, B) = A + B

Álgebra de Boole: operações

- São definidas algumas operações elementares na álgebra booleana:
  - Operação “Não” (NOT)
  - Operação “E” (AND)
  - Operação “Ou” (OR)
  - NAND
  - NOR
  - Operação “Ou-Exclusivo” (Exclusive-Or ou XOR)
  - XNOR

Álgebra de Boole

- Porta Lógica NOT
  - É a porta Inversora
  - Operador: Barra, Apóstrofo

$$\overline{A}\ ,\ A'$$

  - Símbolo

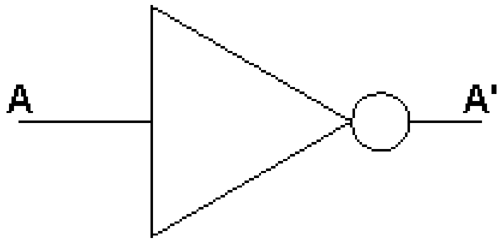


Tabela da Verdade

A	F = A'
0	1
1	0

Álgebra de Boole

- Porta Lógica OR
  - Necessita de duas ou mais entradas
  - Operador: +

$$F = A + B$$

  - Símbolo

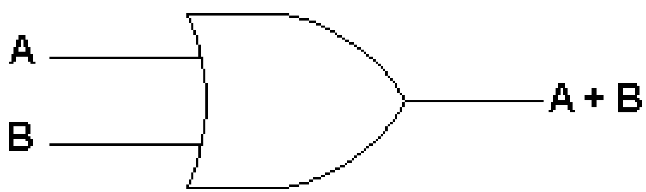
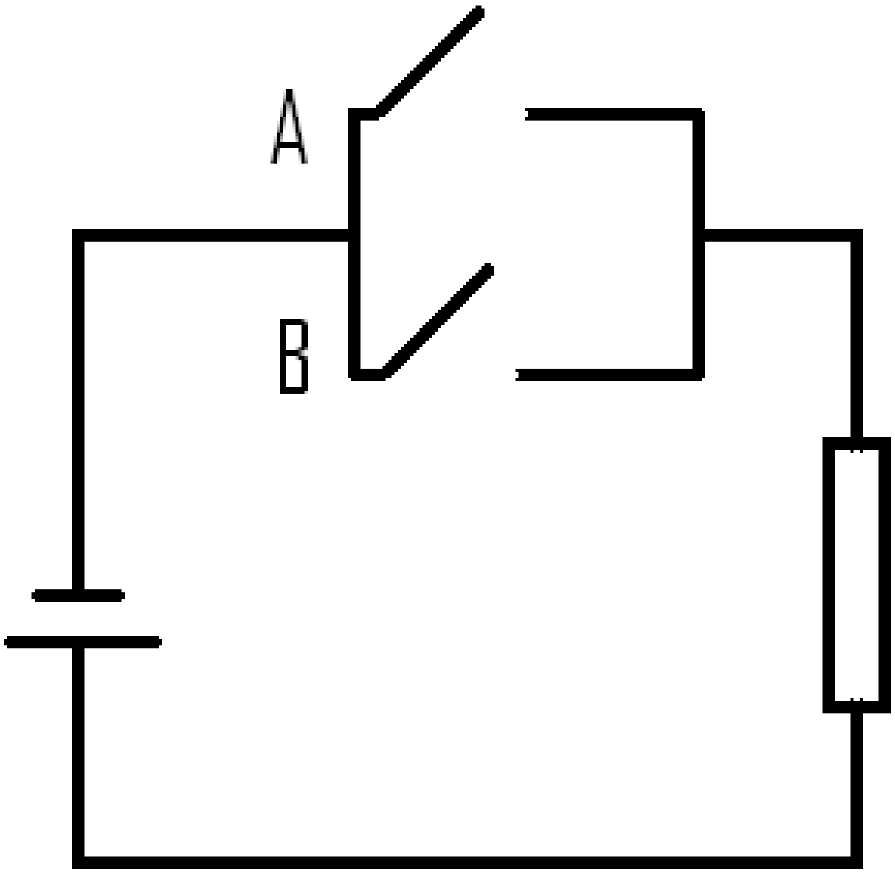


Tabela da Verdade

A	B	F = (A+B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Álgebra de Boole

- OR



Álgebra de Boole

- Porta Lógica AND
  - Necessita de duas ou mais entradas
  - Operador: .

    F = A . B

  - Símbolo

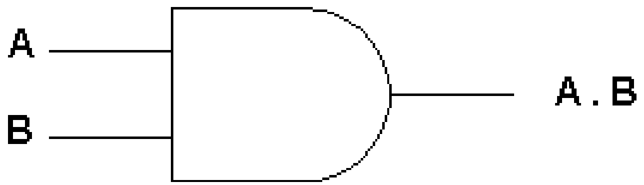
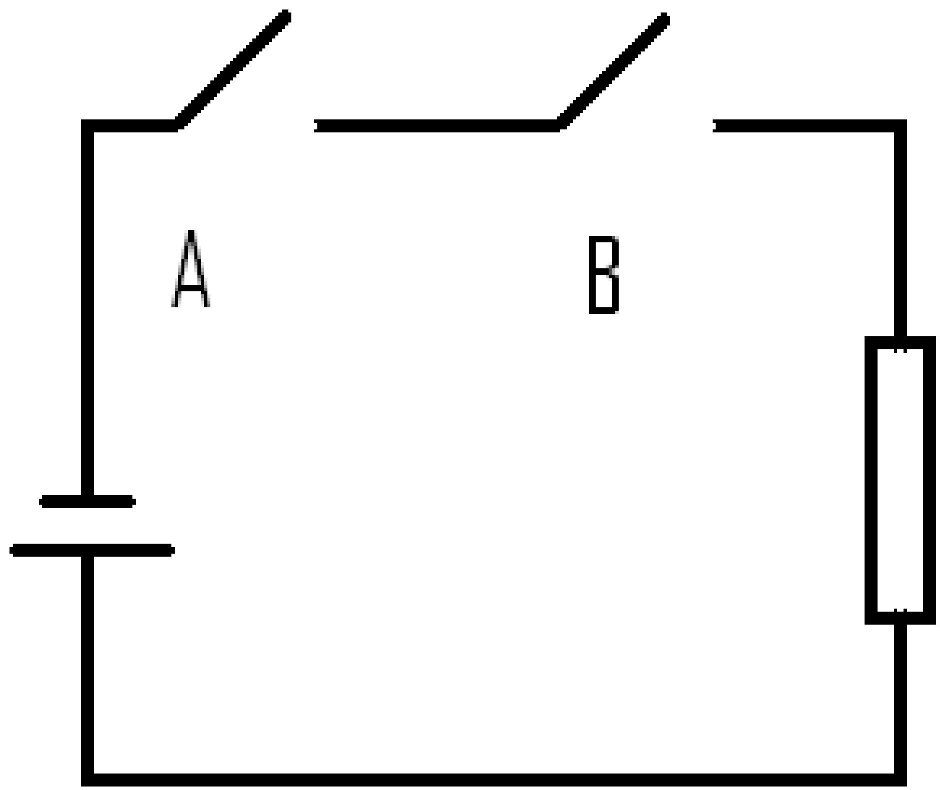


Tabela da Verdade

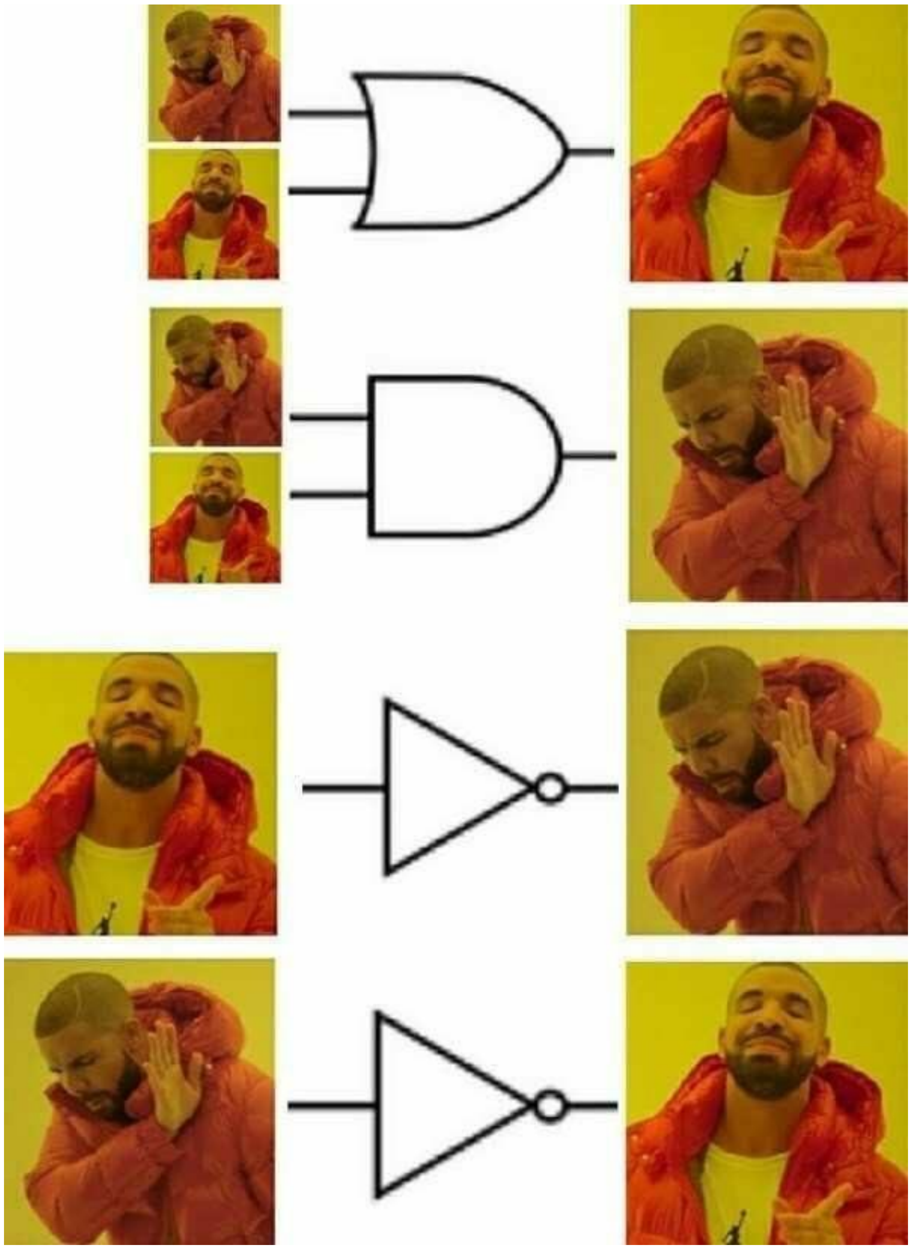
A	B	F = (A.B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra de Boole

- AND



Portanto ...



Álgebra de Boole

- Porta Lógica NOR
  - Equivalente a uma porta OR seguido de uma NOT
  - Operador:

$$F = (A + B)'$$

  - Símbolo

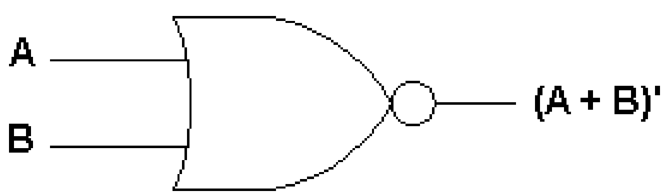


Tabela da Verdade

A	B	F = (A+B)’
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Álgebra de Boole

- Porta Lógica NAND
  - Equivalente a uma porta AND seguido de uma NOT
  - Operador:

$$F = (A \cdot B)'$$

  - Símbolo

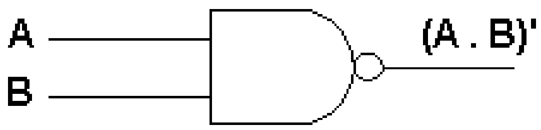


Tabela da Verdade

A	B	F = (A.B)’
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

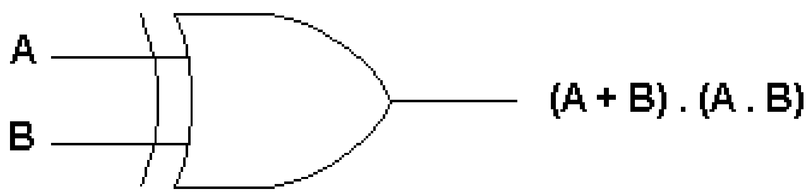
Álgebra de Boole

- Porta Lógica XOR
  - É o OU Exclusivo
  - Compara dois valores, se forem diferentes, dá saída = 1
  - Operador:

$$F = (A \oplus B)$$

Tabela da Verdade

- Símbolo



A	B	F = (A⊕B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Álgebra de Boole

- Porta Lógica XNOR
  - É o complemento da Função XOR
  - Operador:

$$F = (A \oplus B)'$$

  - Símbolo

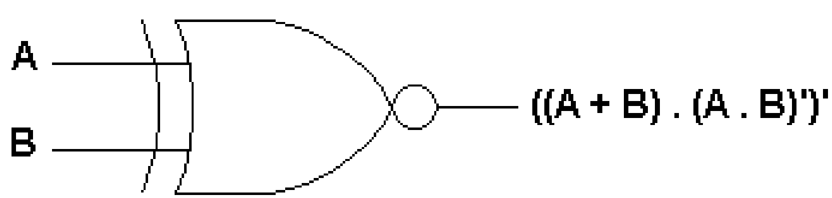


Tabela da Verdade

A	B	F = (A⊕B)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo

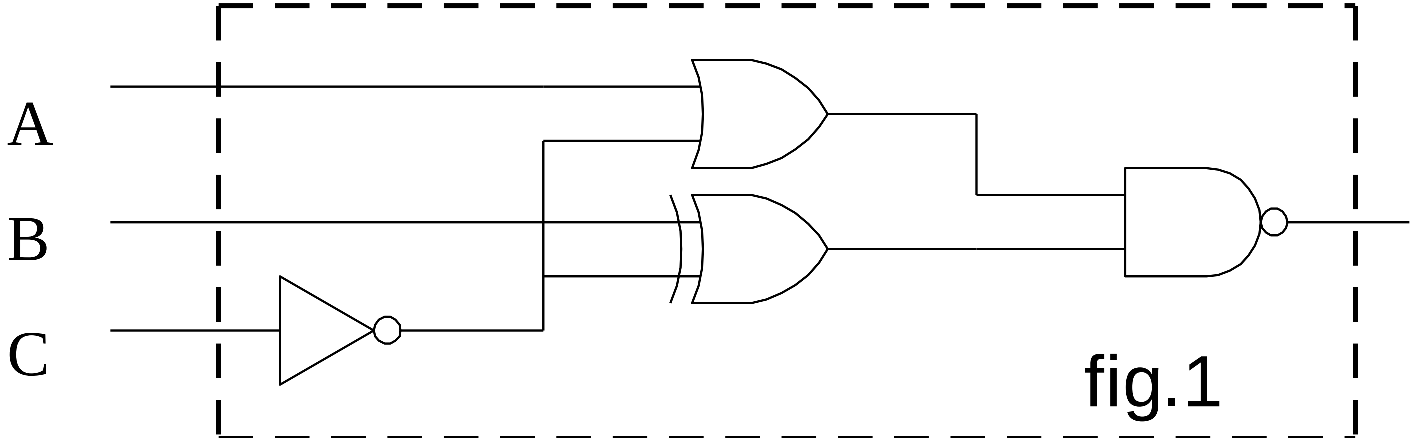
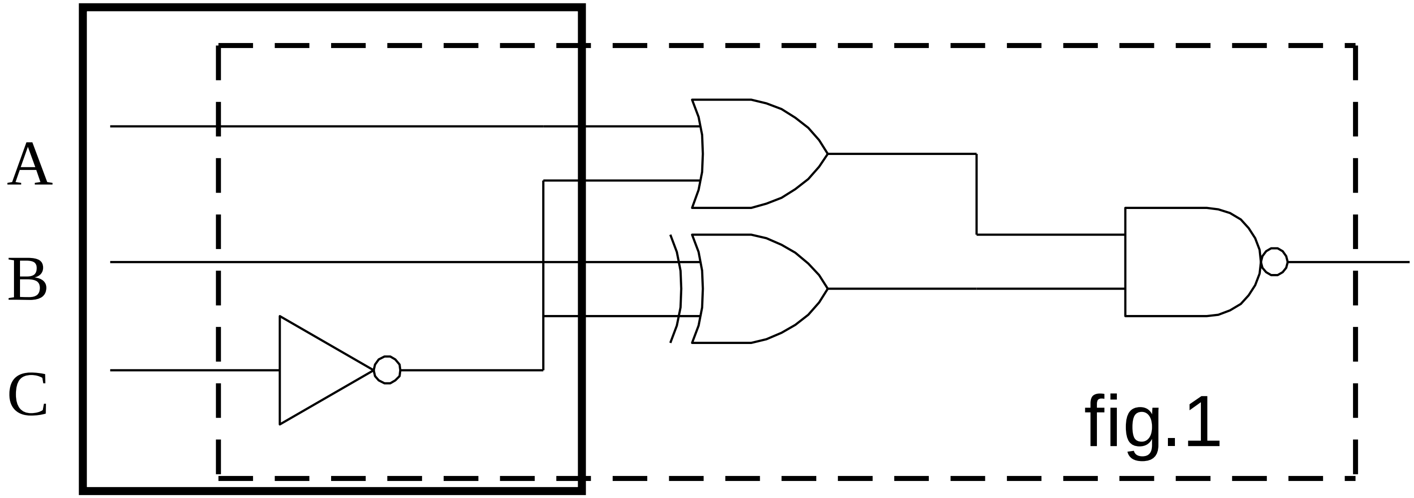


fig.1

A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo



A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo

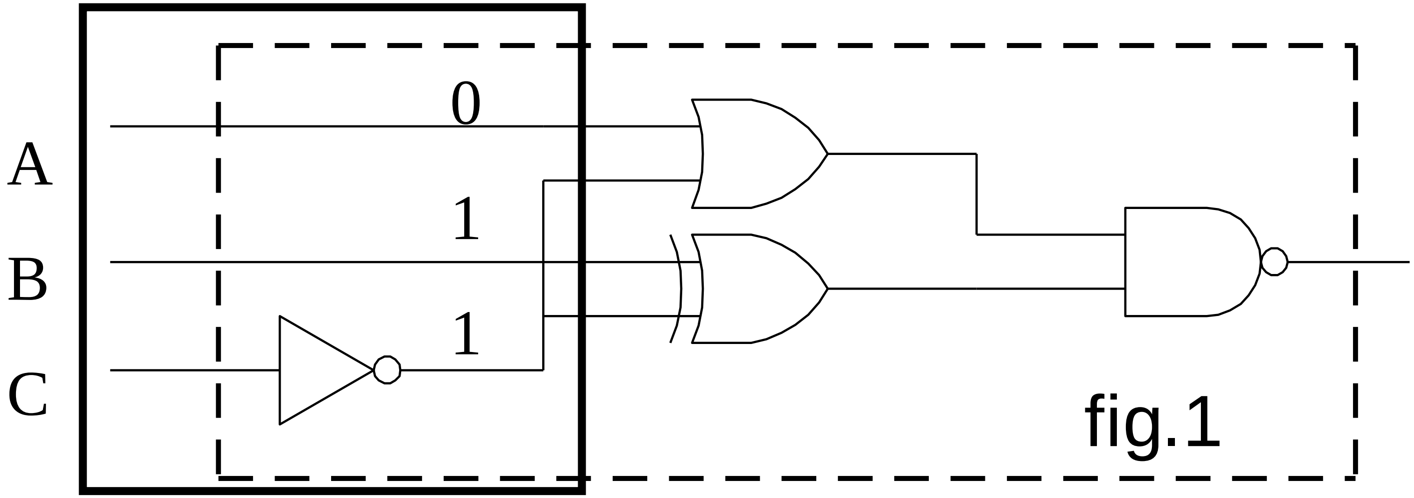


fig.1

A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo

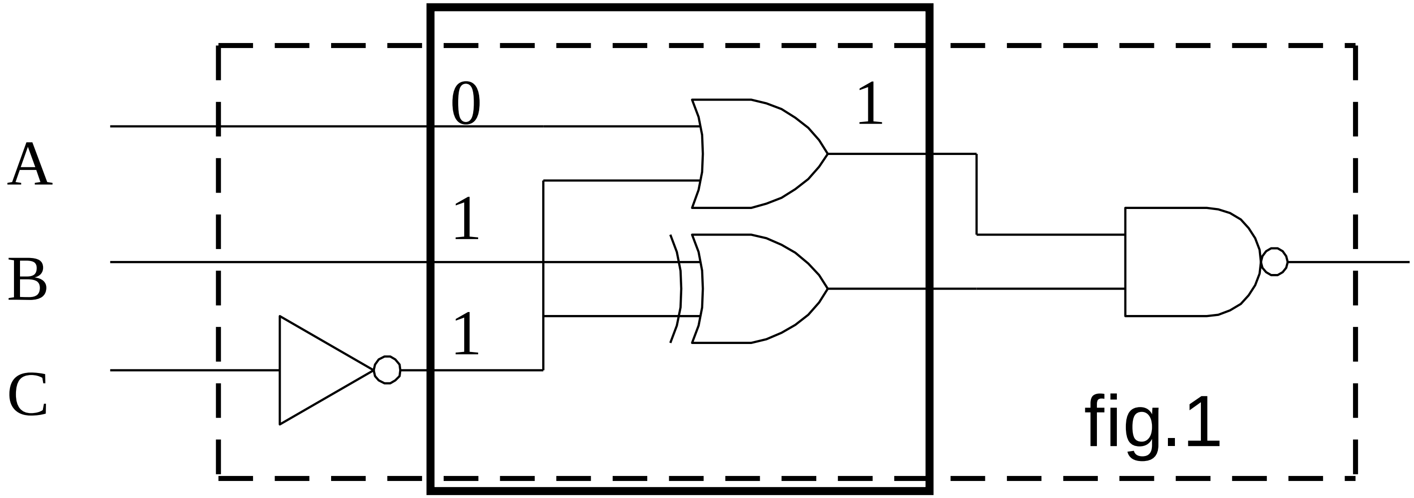


fig.1

A = 0, B = 1, C = 0

Exemplo

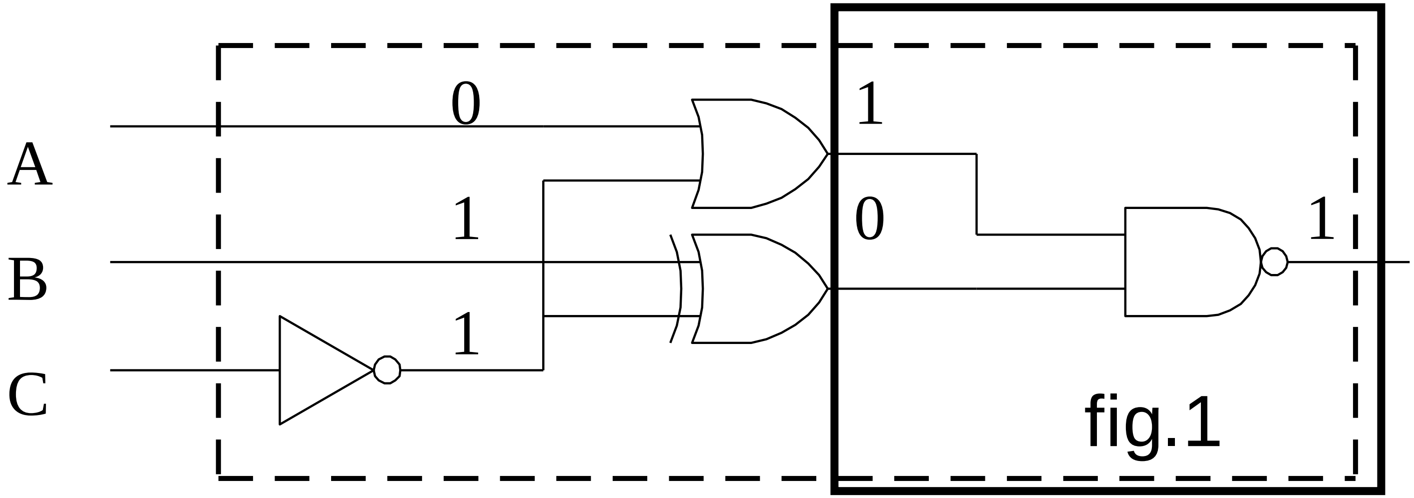


fig.1

A = 0, B = 1, C = 0

Exercícios

S = 0

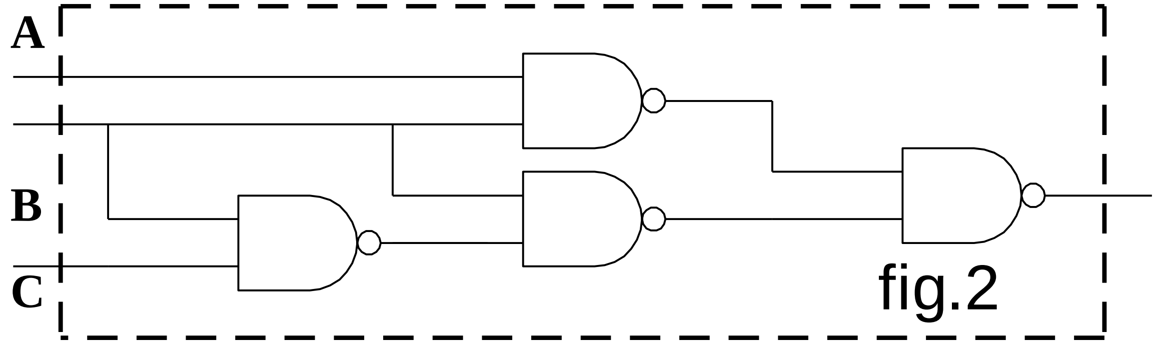
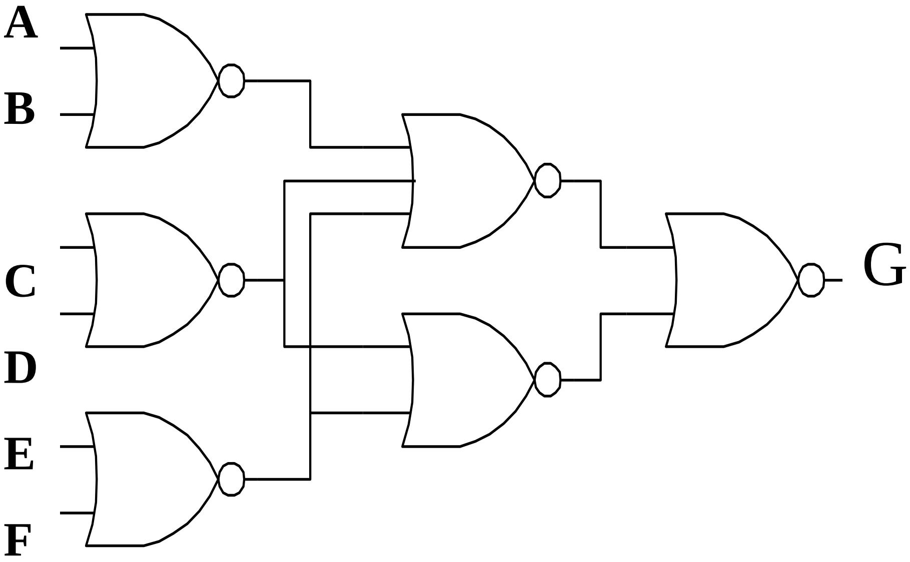


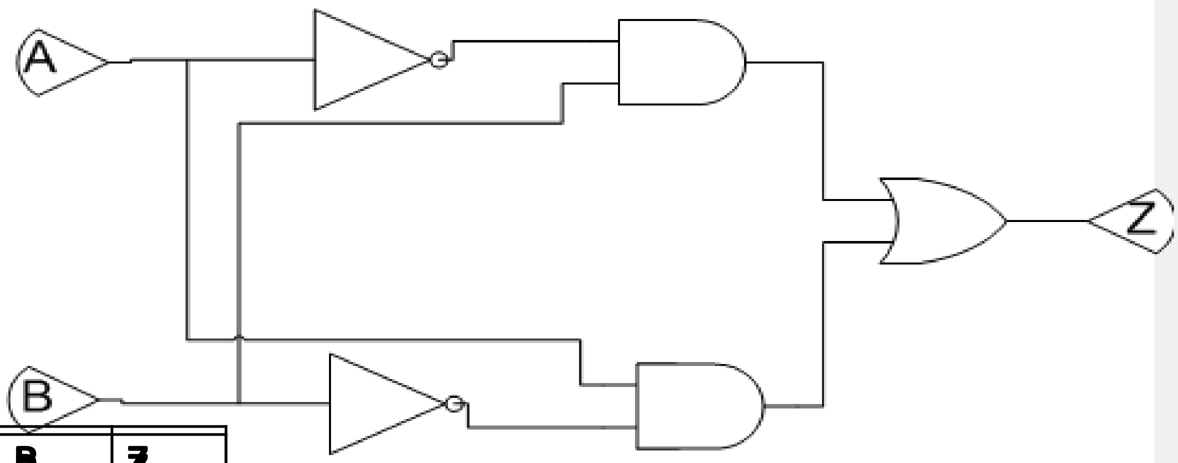
fig.2

A = 0, B = 1, C = 1, D = 0, E = 0, F = 1

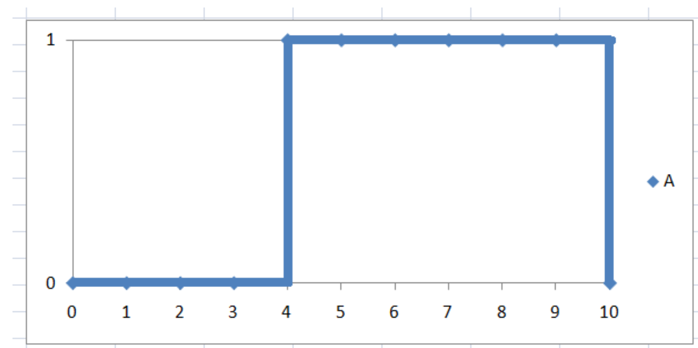
S = 0

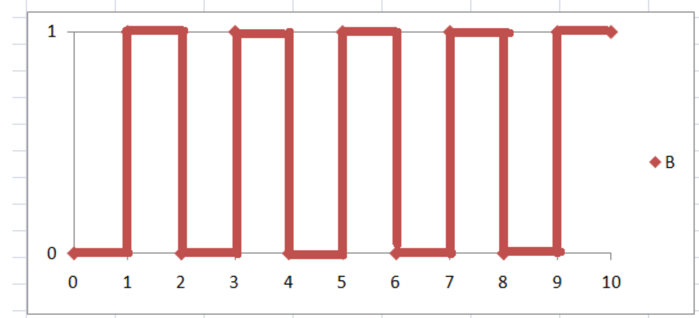


Exercício



T	A	B	Z
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	0	1
9	1	1	0
10	0	1	1





Álgebra de Boole: precedência

- Precedência das Operações
  - (0) parêntesis
  - (1) “Negação”
  - (2) “E”
  - (3) “Ou”, “Ou-exclusivo”
- O uso de parêntesis altera a precedência “normal” dos operadores, como na álgebra comum.

Álgebra de Boole: propriedades

- Sendo A, B e C variáveis booleanas
  - Propriedade Comutativa
    - $A \,.\, B = B \,.\, A$
    - $A + B = B + A$
    - $A \oplus B = B \oplus A$
  - Propriedade Associativa
    - $(A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C) = A \,.\, B \,.\, C$
    - $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
    - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$
  - Propriedade Distributiva
    - $A \,.\, (B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$
    - $A + B \,.\, C = (A + B) \,.\, (A + C)$

Álgebra de Boole: propriedades

- Propriedades (Leis) de Absorção
  - $A + A.B = A$
  - $A + \overline{A}.B = A + B$
  - $(A + \overline{B}).B = A.B$
- Identidades importantes
  - $A.B + A.\overline{B} = A$
  - $(A + B) . (A + \overline{B}) = A$
  - $A.(A + B) = A$
  - $A.(\overline{A} + B) = AB$
  - $A.B + \overline{A}.C = \overline{A} . B . C$

Álgebra de Boole: dualidade

- Existe um princípio especial na álgebra booleana denominado “princípio da dualidade”:
  - Para uma equação booleana qualquer, se trocarmos as operações E (**.**) e operações OU (+) entre si assim como valores 0s e 1s entre si, obteremos uma equação igualmente válida.
  - $A + 0 = A \qquad A \cdot 1 = A$
  - $A + 1 = 1 \qquad A \cdot 0 = 0$
  - $A + \overline{A} = 1 \qquad A \cdot \overline{A} = 0$
  - $A + A = A \qquad A \cdot A = A$

Álgebra de Boole: dualidade

- Teorema de Morgan
- $\overline{a + b} = \overline{a} \,.\, \overline{b}$
- $\overline{a \,.\, b} = \overline{a} + \overline{b}$

Consenso

- $A \,.\, B + A' \,.\, C + B \,.\, C = A \,.\, B + A' \,.\, C$
- $(A+B) \,.\, (A'+C) \,.\, (B+C) = (A+B) \,.\, (A'+C)$

Álgebra de Boole: identidades

- NOT
  - $\overline{0} = 1$
  - $\overline{1} = 0$
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- AND
  - $A \,.\, 1 = A$
  - $A \,.\, 0 = 0$
  - $A \,.\, A = A$
  - $A \,.\, \overline{A} = 0$
- OR
  - $A + 1 = 1$
  - $A + 0 = A$
  - $A + A = A$
  - $A + \overline{A} = 1$

Funções de 2 Variáveis

- A
- B
- AB (AND)
- A+B (OR)
- $A \oplus B$ (XOR)
- $\overline{A}$
- $\overline{B}$
- $\overline{AB}$ (NAND)
- $\overline{A+B}$ (NOR)
- $\overline{A \oplus B}$ (XNOR - equivalência)
- 0 (Constante zero)
- 1 (Constante um)

Simplificação

- Os teoremas, propriedade e identidades da álgebra booleana podem ser aplicados para simplificarmos funções lógicas e, com isso, reduzirmos o número necessário de operações.

$$A + A \,.\, B =$$

$$(A + A) \,.\, (A + B) =$$

$$A \,.\, (A + B) =$$

$$B = 0$$

$$A \,.\, (A + 0) = A \,.\, A = A$$

$$B = 1$$

$$A \,.\, (A + 1) = A \,.\, 1 = A$$

- Propriedade Comutativa
  - $A \,.\, B = B \,.\, A$
  - $A + B = B + A$
  - $A \oplus B = B \oplus A$
- Propriedade Associativa
  - $(A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, (B \,.\, C) = A \,.\, B \,.\, C$
  - $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
  - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$
- Propriedade Distributiva
  - $A \,.\, (B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$
  - $A + B \,.\, C = (A + B) \,.\, (A + C)$

- Teorema de Morgan
- $\overline{a + b} = \overline{a} \,.\, \overline{b}$
- $\overline{a \,.\, b} = \overline{a} + \overline{b}$

- NOT
  - $\overline{0} = 1$
  - $\overline{1} = 0$
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- AND
  - $A \,.\, 1 = A$
  - $A \,.\, 0 = 0$
  - $A \,.\, A = A$
  - $A \,.\, \overline{A} = 0$
- OR
  - $A + 1 = 1$
  - $A + 0 = A$
  - $A + A = A$
  - $A + \overline{A} = 1$

- Propriedades (Leis) de Absorção
  - $A + A.B = A$
  - $A + \overline{A}.B = A + B$
  - $(A + \overline{B}).B = A.B$
- Identidades importantes
  - $A.B + A.\overline{B} = A$
  - $(A + B) \,.\, (A + \overline{B}) = A$
  - $A.(A + B) = A$
  - $A.(\overline{A} + B) = AB$
  - $A.B + \overline{A}.C = \overline{A} \,.\, B \,.\, C$

Exemplo

$$F = a + b \cdot \overline{(\overline{a} \cdot \overline{c})} =$$ Teorema de Morgan

$$a + b \cdot \overline{\overline{(a + c)}} =$$ Identidade

$$a + b \cdot (a + c) =$$ Distributiva

$$a + b \cdot a + bc =$$ Lei da Absorção

$$a + bc$$

F = a + b . (a' . c')'

A= 1 ; B= 0; C = 0

F = 1 . (0 . 1)'

F = 1 . 1

F = 1

F = a + b . c

F = 1 + 0 . 0

F = 1 + 0

F = 1

Exercícios:

Simplificar as expressões:

1. $S = A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$

2. $S = (\overline{A} + B) \cdot (A + B)$

3. $S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$

- 1) $S = A . \overline{B}$
- 2) $S = B$
- 3) $S = A$

1)

$$S = A \cdot B' \cdot C + A \cdot B' \cdot C'$$

$$S = A \cdot B' \cdot (C + C')$$

$$S = A \cdot B'$$

$S = a \cdot b' \cdot c + a \cdot b' \cdot c'$

CASO 1

$A = 1 ; B = 0; C = 0$

$S = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1$

$S = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1$

$S = 0 + 1$

$S = 1$

$S = a \cdot b'$

$S = 1 \cdot 1$

$S = 1$

$S = a \cdot b' \cdot c + a \cdot b' \cdot c'$

CASO 2

$A = 0 ; B = 0 ; C = 1$

$S = 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0$

$S = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0$

$S = 0 + 0$

$S = 0$

$S = a \cdot b'$

$S = 0 \cdot 1$

$S = 0$

2)

$S = (A' + B) . (A + B)$

Identidade

$S = B$

3)

$S = A . B . C + A . C' + A . B'$

$S = A . [(B . C) + C' + B']$

$S = A . [(b . c) + (c . b)']$

Identidade $A + A' = 1$

$S = A$

S = (a' + b) . (a + b)

CASO 1

A= 1 ; B= 0;

S = (0 + 0) . (1 + 0)

S = 0 . 1

S = 0

S = b

S = 0

$$S = (a' + b) \cdot (a + b)$$

CASO 2

A= 0 ; B= 1;

$$S = (1 + 1) \cdot (0 + 1)$$

$$S = 1 \cdot 1$$

$$S = 1$$

$$S = b$$

$$S = 1$$

S = a . b . c + a . c' + a . b`

CASO 1

A= 1 ; B= 0; C = 0

S = 1 . 0 . 0 + 1 . 1 + 1 . 1

S = 0 . 0 + 1 + 1

S = 0 + 1 + 1

S = 1 + 1

S = 1

S = A

S = 1

$S = a \cdot b \cdot c + a \cdot c' + a \cdot b`$

CASO 2

$A = 0 \; ; \; B = 0 \; ; \; C = 1$

$S = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$

$S = 0 \cdot 1 + 0 + 0$

$S = 0 + 0 + 0$

$S = 0 + 0$

$S = 0$

$S = A$

$S = 0$

Bibliografia

- Abel Guilhermino, Notas de Aula, UPE
- Romeu Corradi Jr., UNICAMP