

William Stallings

Computer Organization

and Architecture

Chapter 09

Circuitos Digitais e Álgebra Booleana

Álgebra de Boole (ou Booleana)

- ❑ Desenvolvida pelo matemático britânico George Boole para estudo da lógica.
- ❑ Definida sobre um conjunto de dois elementos: (falso, verdadeiro) (0, 1) (baixo, alto)
- ❑ Seus elementos, a princípio, não tem significado numérico.
- ❑ Postulados: se x é uma variável booleana então:
 - ❑ Se $x \neq 0 \Rightarrow x = 1$
 - ❑ Se $x \neq 1 \Rightarrow x = 0$

Álgebra de Boole: funções

- Uma variável booleana só pode assumir apenas um dos valores possíveis (0 e 1)
- Uma ou mais variáveis e operadores podem ser combinados formando uma função lógica
 - $Z_1(A) = f(A) = \dots$ (expressão usando var. A)
 - $Z_2(A,B) = f(A,B) = \dots$ (expr. usando var. A e B)
- Resultados de uma função lógica podem ser expressos numa tabela relacionando todas as combinações possíveis dos valores que suas variáveis podem assumir e seus resultados correspondentes: a Tabela-Verdade.

Álgebra de Boole: Tabela Verdade

Variáveis		Função Lógica
A	B	$Z=f(A,B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lista das combinações possíveis dos estados das variáveis de entrada

Resultados da função lógica para cada combinação dos estados de entrada

- ◆ Tabela-Verdade relaciona os resultados (saída) de uma função lógica para todas as combinações possíveis de suas variáveis (entrada).
- ◆ Na Tabela-Verdade acima a função lógica Z possui duas variáveis A e B , sendo $Z = f(A, B) = A + B$

Álgebra de Boole: Operações

- São definidas algumas operações elementares na álgebra booleana:
 - ◆ Operação “Não” (NOT)
 - ◆ Operação “E” (AND)
 - ◆ Operação “Ou” (OR)
 - ◆ NAND
 - ◆ NOR
 - ◆ Operação “Ou-Exclusivo” (Exclusive-Or ou XOR)
 - ◆ XNOR

Porta Lógica NOT

- ◆ É a porta Inversora
- ◆ Operador: Barra, Apóstrofo

\bar{A} , A'

- ◆ Símbolo

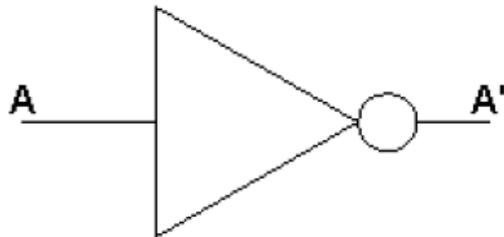


Tabela da Verdade

A	F = A'
0	1
1	0

Porta Lógica OR

- ◆ Necessita de duas ou mais entradas
- ◆ Operador: +

$$F = A + B$$

- ◆ Símbolo

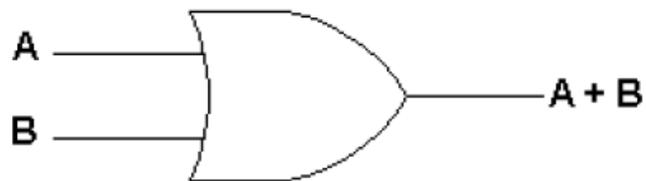
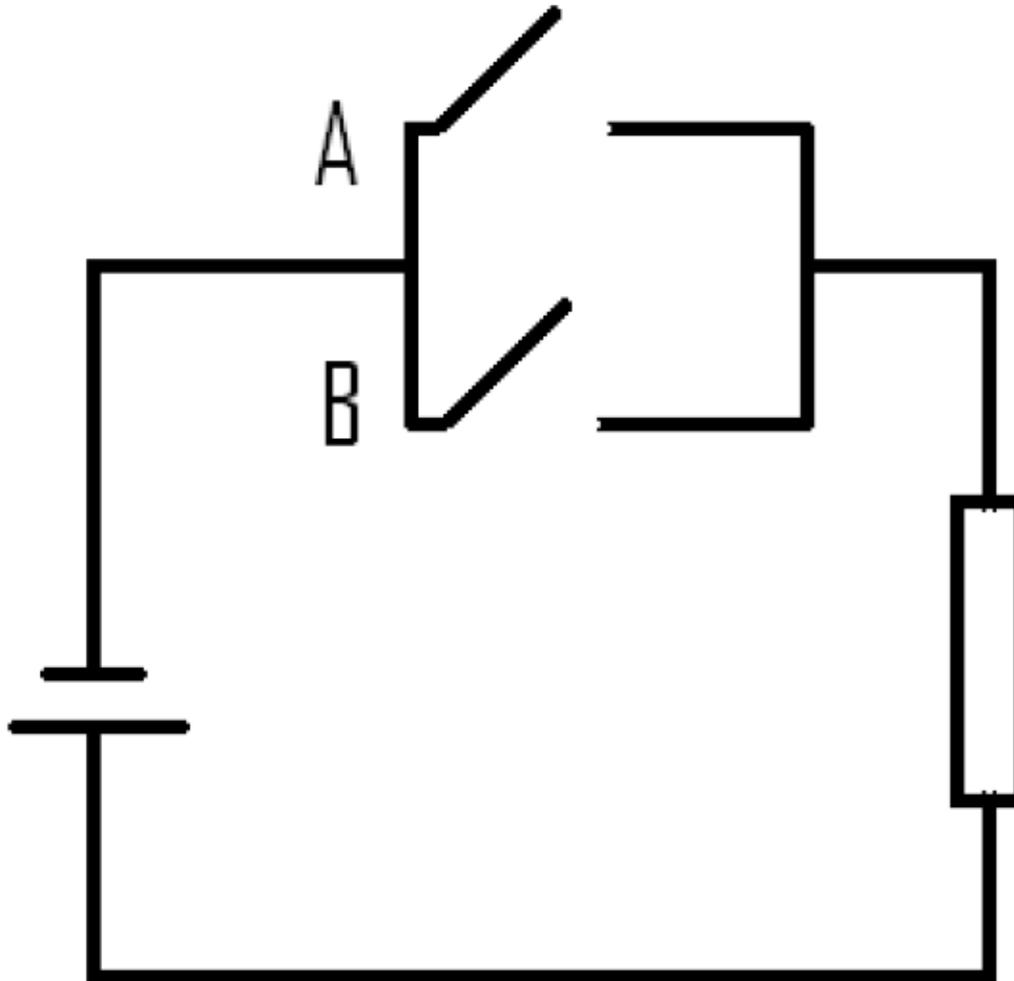


Tabela da Verdade

A	B	F = (A+B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Porta Lógica OR



Porta Lógica AND

- ◆ Necessita de duas ou mais entradas
- ◆ Operador: $.$

$$F = A . B$$

- ◆ Símbolo

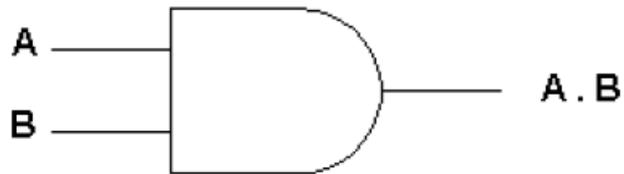
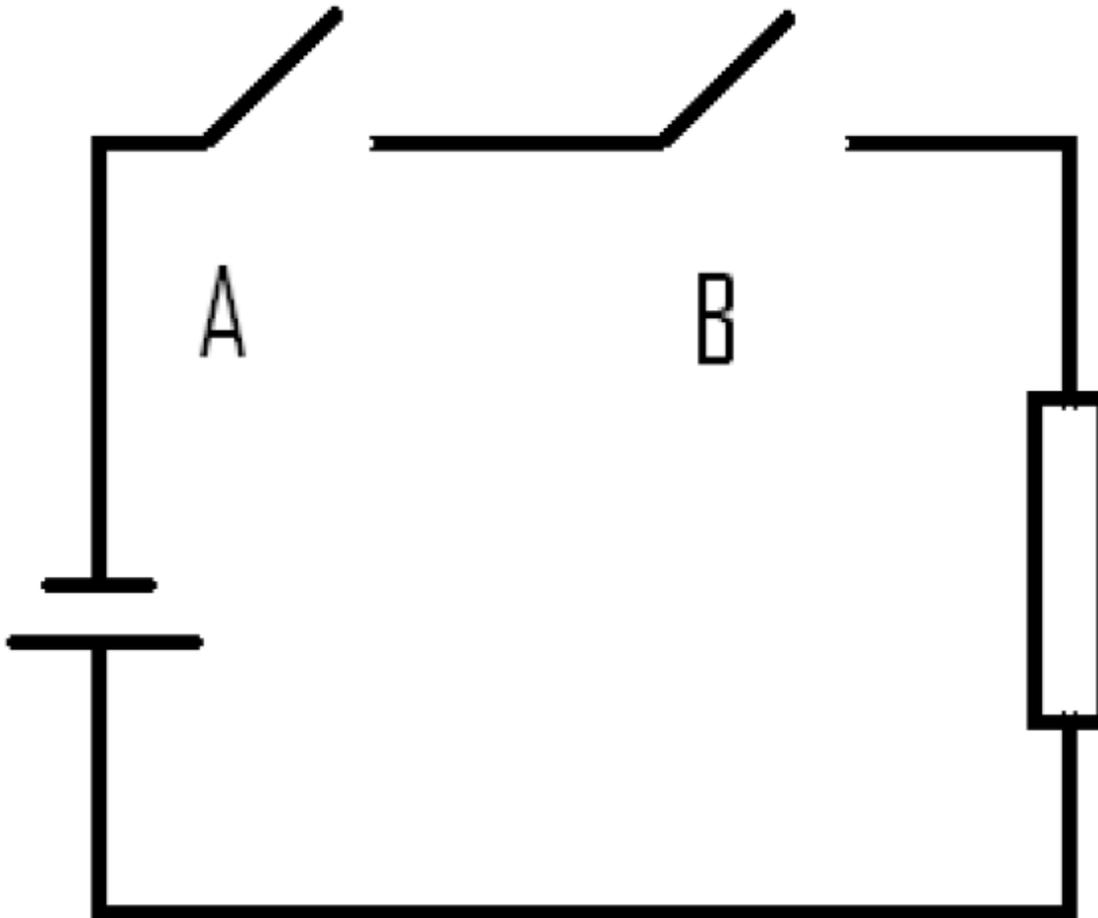


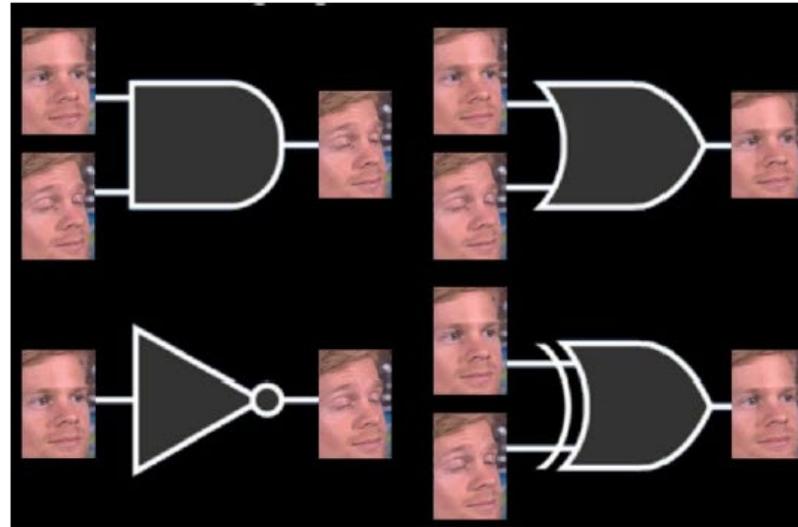
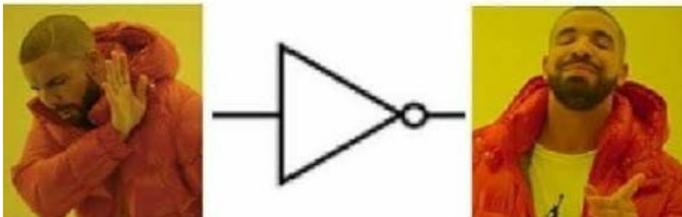
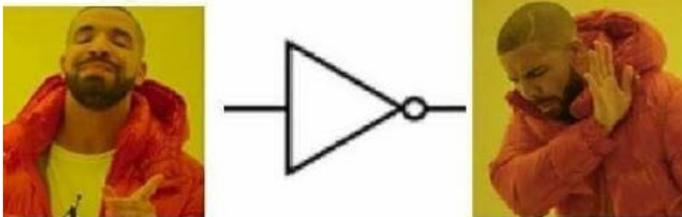
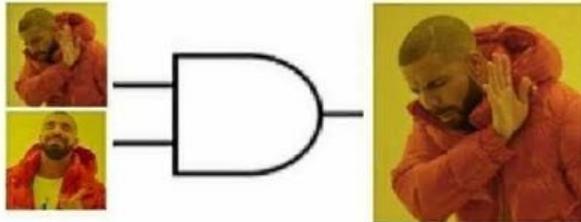
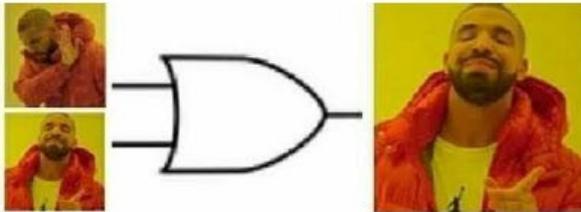
Tabela da Verdade

A	B	F = (A.B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta Lógica AND



Portanto



Porta Lógica NOR

- ◆ Equivalente a uma porta OR seguido de uma NOT
- ◆ Operador:

$$F = (A + B)'$$

- ◆ Símbolo

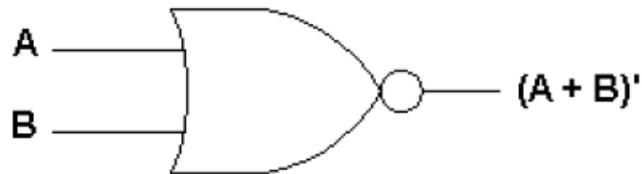


Tabela da Verdade

A	B	$F = (A+B)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Porta Lógica NAND

- ◆ Equivalente a uma porta AND seguido de uma NOT
- ◆ Operador:

$$F = (A \cdot B)'$$

- ◆ Símbolo

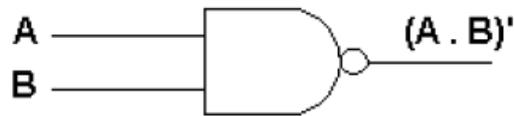


Tabela da Verdade

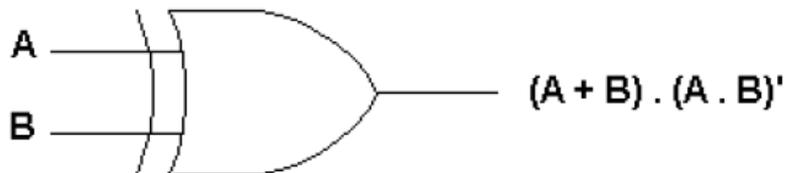
A	B	$F = (A \cdot B)'$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porta Lógica XOR

- ◆ É o OU Exclusivo
- ◆ Compara dois valores, se forem diferentes, dá saída = 1
- ◆ Operador:

$$F = (A \oplus B)$$

- ◆ Símbolo



Com 3 ou mais entradas:
Se o número de entradas 1 for ímpar = 1
Se o número de entradas 1 for par = 0

Tabela da Verdade

A	B	F = (A⊕B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porta Lógica XNOR

- ◆ É o complemento da Função XOR
- ◆ Operador:

$$F = (A \oplus B)'$$

- ◆ Símbolo

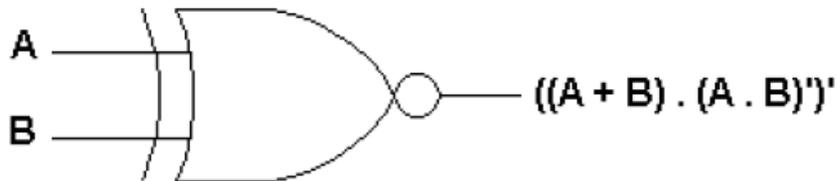
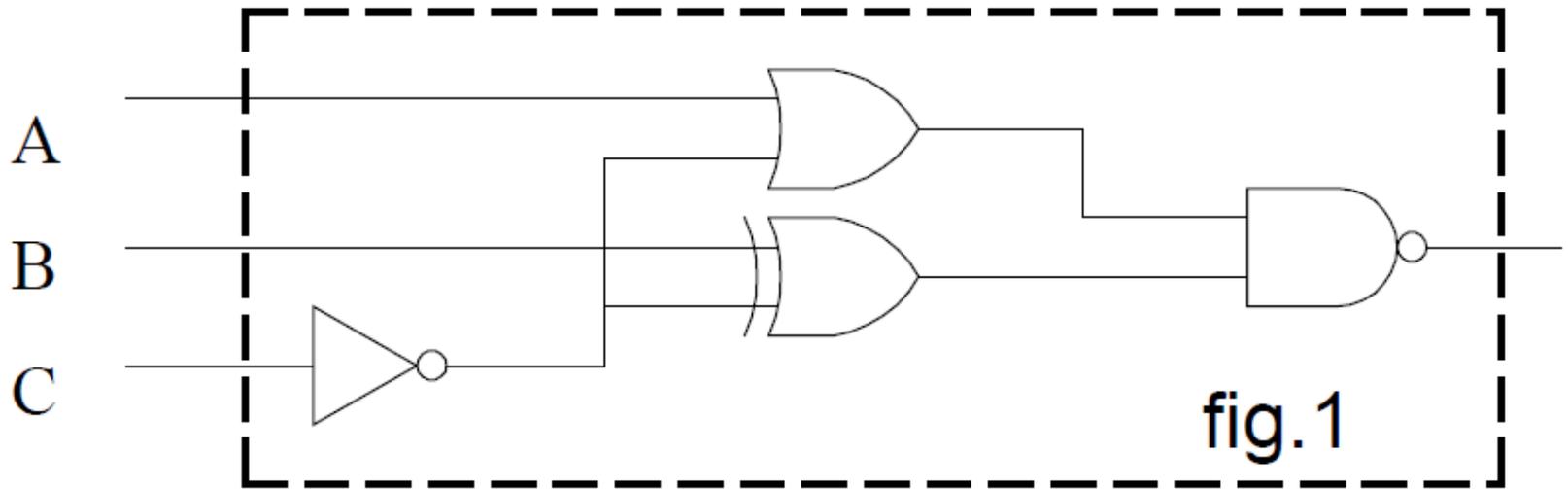


Tabela da Verdade

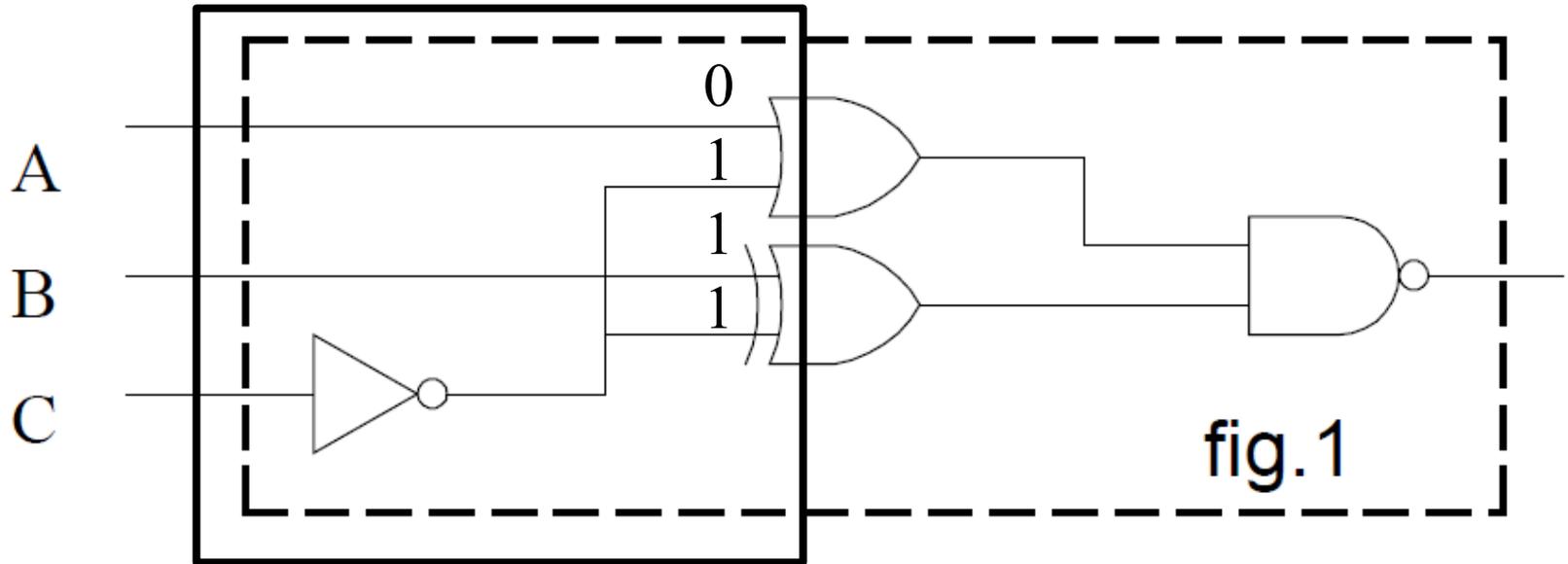
A	B	F = (A⊕B)'
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo



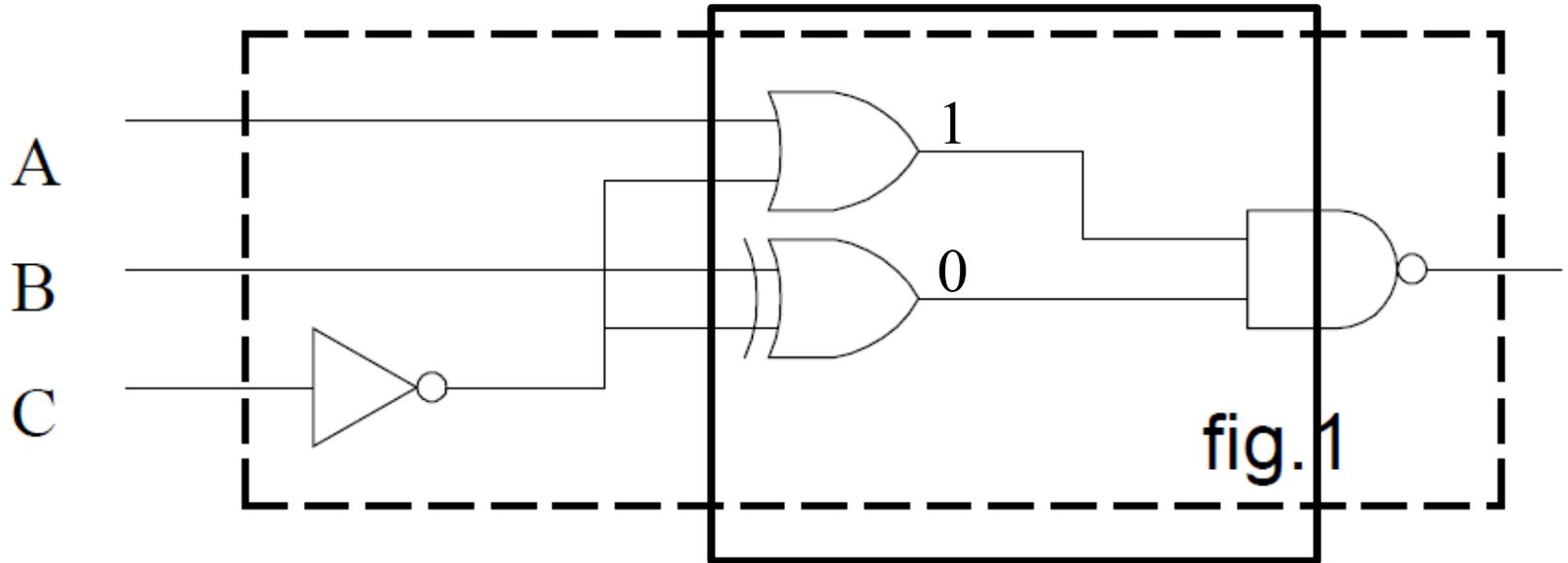
$$A = 0, B = 1, C = 0$$

Exemplo



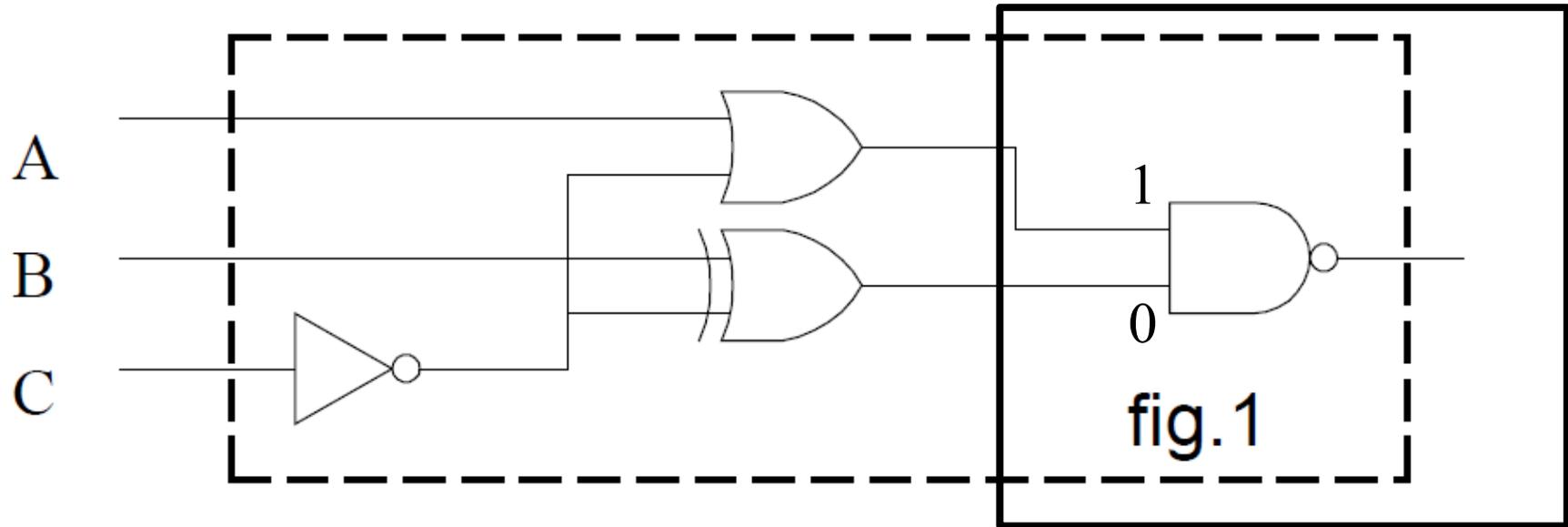
$$A = 0, B = 1, C = 0$$

Exemplo



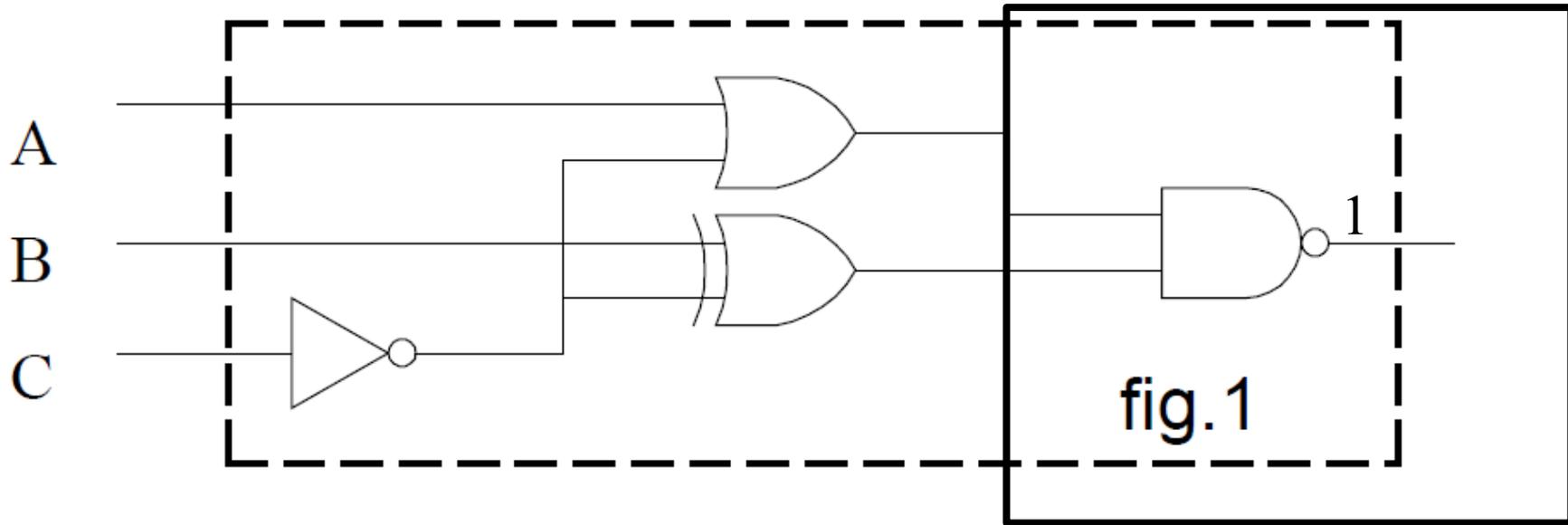
$A = 0, B = 1, C = 0$

Exemplo



$A = 0, B = 1, C = 0$

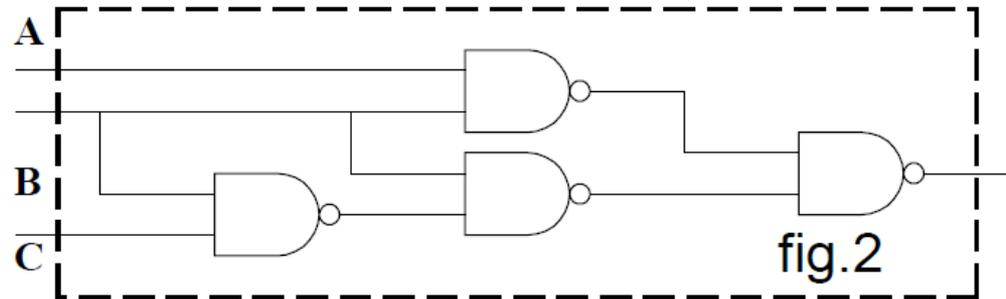
Exemplo



$$A = 0, B = 1, C = 0$$

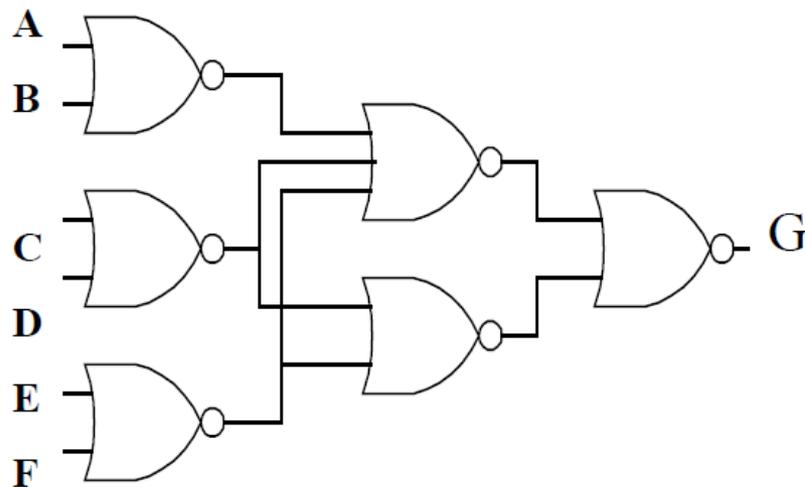
Exercícios

S = 0



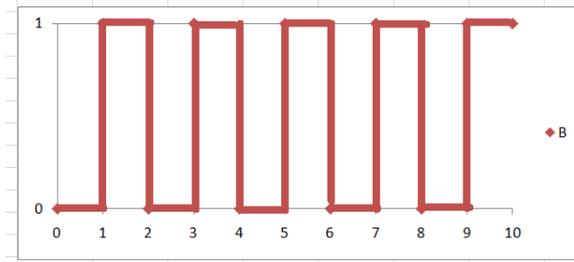
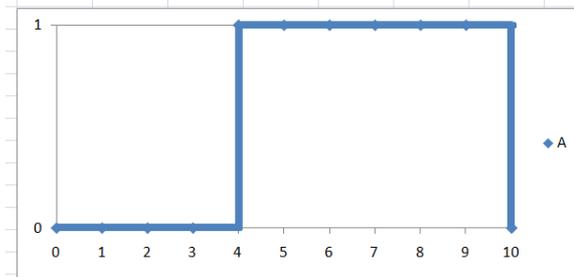
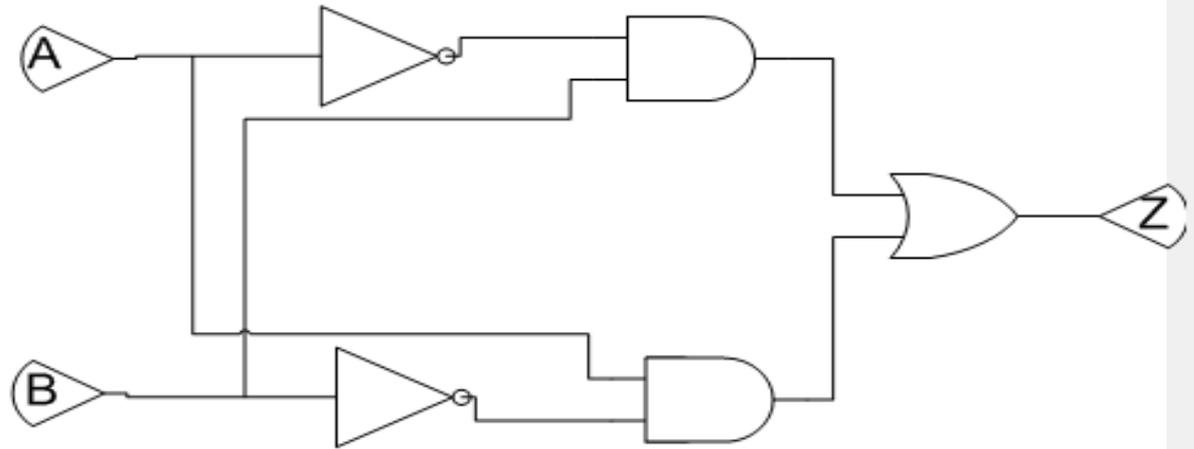
$A = 0, B = 1, C = 1, D = 0, E = 0, F = 1$

S = 0



Exercício

T	A	B	Z
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	0	0
3	0	1	1
4	1	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	0	1
9	1	1	0
10	0	1	1



Álgebra de Boole: precedência

- Precedência das Operações
 - (0) parêntesis
 - (1) "Negação"
 - (2) "E"
 - (3) "Ou", "Ou-exclusivo"
- O uso de parêntesis altera a precedência "normal" dos operadores, como na álgebra comum.

Álgebra de Boole: propriedades

□ Sendo A , B e C variáveis booleanas

□ Propriedade Comutativa

$$\square A \cdot B = B \cdot A$$

$$\square A + B = B + A$$

$$\square A \oplus B = B \oplus A$$

□ Propriedade Associativa

$$\square (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$\square (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

$$\square (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

□ Propriedade Distributiva

$$\square A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\square A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

Álgebra de Boole: propriedades

◆ Propriedades (Leis) de Absorção

$$❖ A + A.B = A$$

$$❖ A + \bar{A}.B = A + B$$

$$❖ (A + \bar{B}).B = A.B$$

◆ Identidades importantes

$$❖ A.B + A.\bar{B} = A$$

$$❖ (A + B) . (A + \bar{B}) = A$$

$$❖ A.(A + B) = A$$

$$❖ A.(\bar{A} + B) = AB$$

$$❖ A.B + \bar{A}.C = \bar{A} . B . C$$

Álgebra de Boole: dualidade

□ Teorema de Morgan

$$\square \overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$$

$$\square \overline{a . b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Consenso

$$\blacklozenge \mathbf{A \cdot B + A' \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A' \cdot C}$$

$$\blacklozenge \mathbf{(A+B) \cdot (A'+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (A'+C)}$$

Álgebra de Boole: identidades

◆ NOT

$$◆ \overline{0} = 1$$

$$◆ \overline{1} = 0$$

$$◆ \overline{\overline{A}} = A$$

◆ AND

$$◆ A \cdot 1 = A$$

$$◆ A \cdot 0 = 0$$

$$◆ A \cdot A = A$$

$$◆ A \cdot \overline{A} = 0$$

◆ OR

$$◆ A + 1 = 1$$

$$◆ A + 0 = A$$

$$◆ A + A = A$$

$$◆ A + \overline{A} = 1$$

Simplificação

- Os teoremas, propriedade e identidades da álgebra booleana podem ser aplicados para simplificarmos funções lógicas e, com isso, reduzirmos o número necessário de operações.

$$A + A \cdot B =$$

$$(A + A) \cdot (A + B) =$$

$$A \cdot (A + B) =$$

$$B = 0$$

$$A \cdot (A + 0) = A \cdot A = A$$

$$B = 1$$

$$A \cdot (A + 1) = A \cdot 1 = A$$

Resumo

◆ Propriedade Comutativa

- ❖ $A \cdot B = B \cdot A$
- ❖ $A + B = B + A$
- ❖ $A \oplus B = B \oplus A$

◆ Propriedade Associativa

- ❖ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
- ❖ $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- ❖ $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$

◆ Propriedade Distributiva

- ❖ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ❖ $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

■ Teorema de Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

◆ NOT

- ❖ $\overline{\overline{0}} = 1$
- ❖ $\overline{\overline{1}} = 0$
- ❖ $\overline{\overline{A}} = A$

◆ AND

- ❖ $A \cdot 1 = A$
- ❖ $A \cdot 0 = 0$
- ❖ $A \cdot A = A$
- ❖ $A \cdot \bar{A} = 0$

◆ OR

- ❖ $A + 1 = 1$
- ❖ $A + 0 = A$
- ❖ $A + A = A$
- ❖ $A + \bar{A} = 1$

◆ Propriedades (Leis) de Absorção

- ❖ $A + A \cdot B = A$
- ❖ $A + \bar{A} \cdot B = A + B$
- ❖ $(A + \bar{B}) \cdot B = A \cdot B$

◆ Identidades importantes

- ❖ $A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$
- ❖ $(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$
- ❖ $A \cdot (A + B) = A$
- ❖ $A \cdot (\bar{A} + B) = AB$
- ❖ $A \cdot B + \bar{A} \cdot C = (A + C) \cdot (\bar{A} + B)$

Exemplo

$$F = a + b \cdot \overline{(\overline{a} \cdot \overline{c})} =$$

Teorema de Morgan

$$a + b \cdot \overline{\overline{(a + c)}} =$$

Identidade

$$a + b \cdot (a + c) =$$

Distributiva

$$a + b \cdot a + bc =$$

Lei da Absorção

$$a + bc$$

Exemplo

$$F = a + b \cdot (a' \cdot c')$$

$$A = 1 ; B = 0 ; C = 0$$

$$F = 1 \cdot (0 \cdot 1)$$

$$F = 1 \cdot 1$$

$$F = 1$$

$$F = a + b \cdot c$$

$$F = 1 + 0 \cdot 0$$

$$F = 1 + 0$$

$$F = 1$$

Exercícios

Simplificar as expressões:

1. $S = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$

2. $S = (\bar{A} + B) \cdot (A + B)$

3. $S = ABC + A\bar{C} + A\bar{B}$

1) $S = A \cdot \bar{B}$

2) $S = B$

3) $S = A$

Exercícios

1)

$$S = A \cdot B' \cdot C + A \cdot B' \cdot C'$$

$$S = A \cdot B' \cdot (C + C')$$

$$S = A \cdot B'$$

Exercícios

2)

$$S = (A' + B) \cdot (A + B)$$

Identidade

$$S = B$$

3)

$$S = A \cdot B \cdot C + A \cdot C' + A \cdot B'$$

$$S = A \cdot [(B \cdot C) + C' + B']$$

$$S = A \cdot [(b \cdot c) + (c \cdot b)']$$

Identidade $A + A' = 1$

$$S = A$$

Resumo

◆ Propriedade Comutativa

- ❖ $A \cdot B = B \cdot A$
- ❖ $A + B = B + A$
- ❖ $A \oplus B = B \oplus A$

◆ Propriedade Associativa

- ❖ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
- ❖ $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- ❖ $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$

◆ Propriedade Distributiva

- ❖ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ❖ $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

■ Teorema de Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

◆ NOT

- ❖ $\overline{\overline{0}} = 1$
- ❖ $\overline{\overline{1}} = 0$
- ❖ $\overline{\overline{A}} = A$

◆ AND

- ❖ $A \cdot 1 = A$
- ❖ $A \cdot 0 = 0$
- ❖ $A \cdot A = A$
- ❖ $A \cdot \bar{A} = 0$

◆ OR

- ❖ $A + 1 = 1$
- ❖ $A + 0 = A$
- ❖ $A + A = A$
- ❖ $A + \bar{A} = 1$

◆ Propriedades (Leis) de Absorção

- ❖ $A + A \cdot B = A$
- ❖ $A + \bar{A} \cdot B = A + B$
- ❖ $(A + \bar{B}) \cdot B = A \cdot B$

◆ Identidades importantes

- ❖ $A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$
- ❖ $(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$
- ❖ $A \cdot (A + B) = A$
- ❖ $A \cdot (\bar{A} + B) = AB$
- ❖ $A \cdot B + \bar{A} \cdot C = (A + C) \cdot (\bar{A} + B)$