

# Árvores

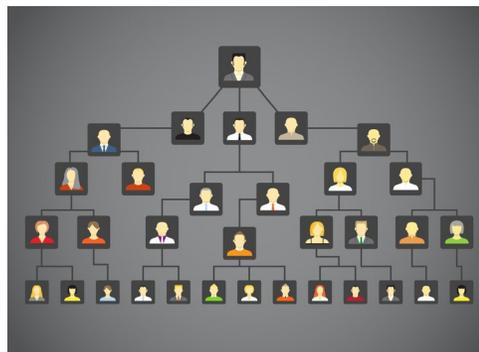
Árvores Binárias

**Prof. Leandro Colevati**

# Introdução

---

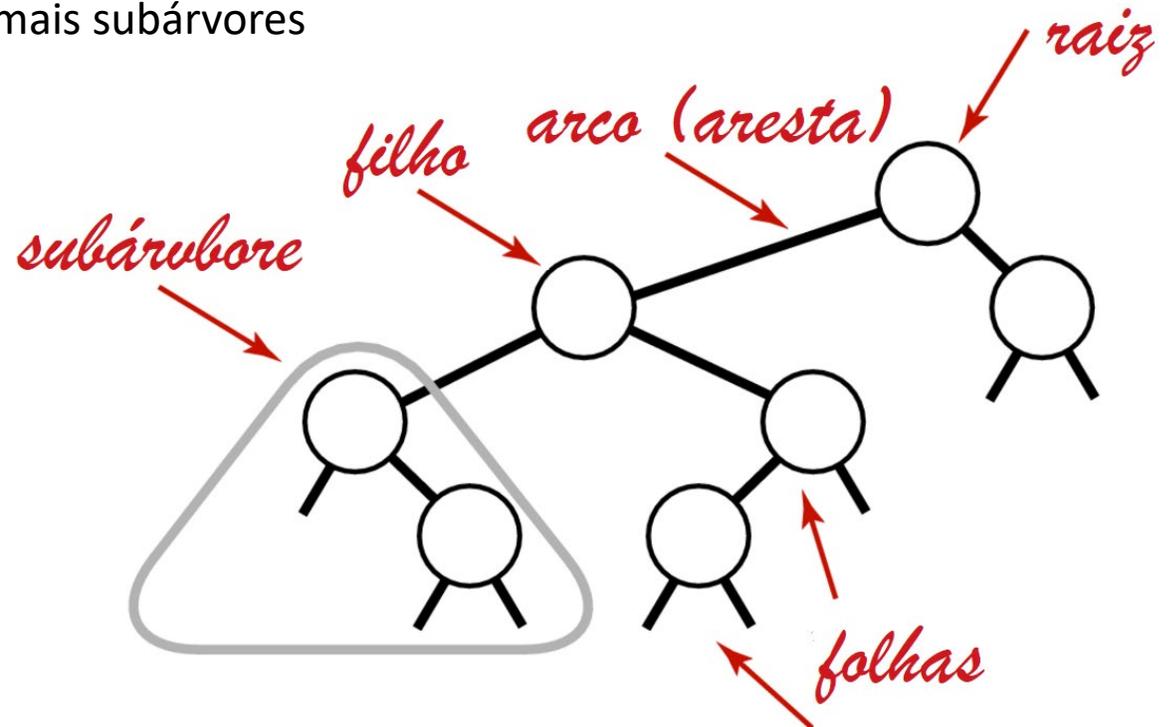
- Estruturas estudadas até agora não são adequadas para representar dados que devem ser dispostos de maneira hierárquica
- Exemplos:
  - Hierarquia de pastas (Sistemas de Arquivos)
  - Árvore genealógica
- Árvores são estruturas adequadas para representação de hierarquias
- O conceito de árvores está diretamente ligado com recursividade



# Introdução

---

- Elementos básicos:
  - Grau
    - Número de subárvores de um nó
  - Raiz
    - Primeiro elemento da árvore, com zero ou mais subárvores
  - Folha
    - Nós sem filhos
  - Filhos
    - Nós raízes de uma subárvore
  - Arco (Aresta)
    - Conexão entre dois nós



# Introdução

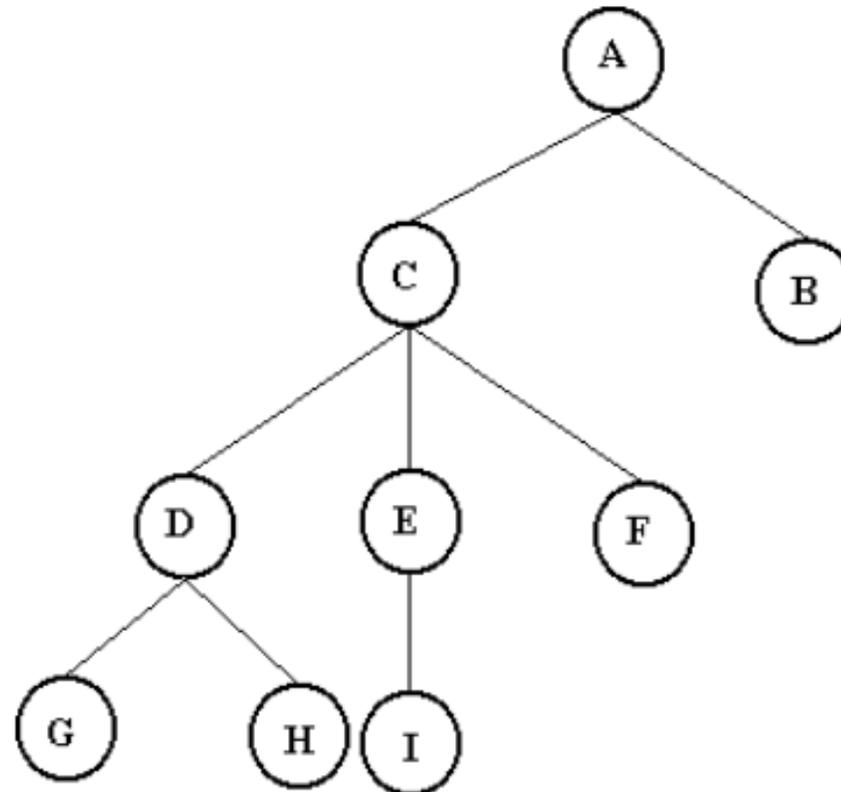
---

- Propriedades:
  - Cada vértice (exceto a raiz) tem exatamente um antecessor (pai)
  - Cada vértice tem nós sucessores imediatos, com exceção das folhas (ou terminais)
  - Filhos de um mesmo pai → irmãos
  - Nós com pelo menos um filho → Internos (ou Não-terminais)
  - Caminho é uma lista de vértices distintos e sucessivos conectados por arcos
  - Existe exatamente um caminho entre a raiz e cada um dos nós da árvore
  - Qualquer nó é a raiz de uma subárvore consistindo dele e dos nós abaixo

# Grau

---

- Grau de um vértice:
  - Número de subárvores não vazias de um nó
- Exemplo:
  - Grau de A = 2
  - Grau de C = 3
  - Grau de E = 1



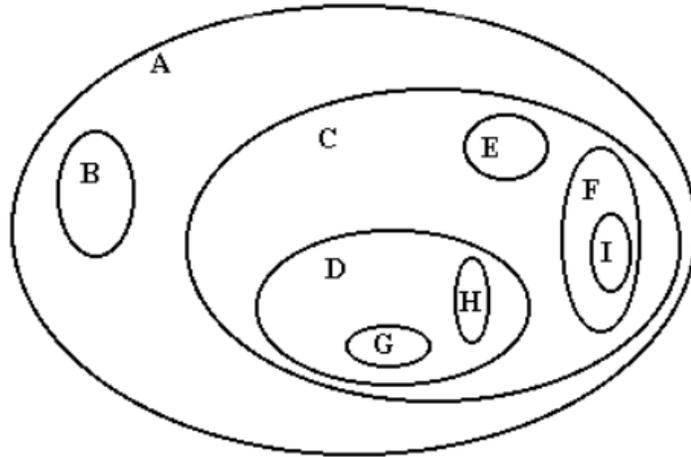
# Representação

---

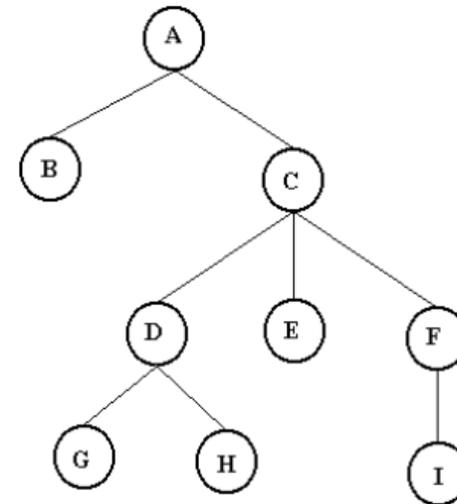
Parênteses aninhados:

- ( A ( B ) ( C ( D ( G ) ( H ) ) ( E ) ( F ( I ) ) ) ) )

Diagrama de Venn (ou Diagrama de Inclusão):



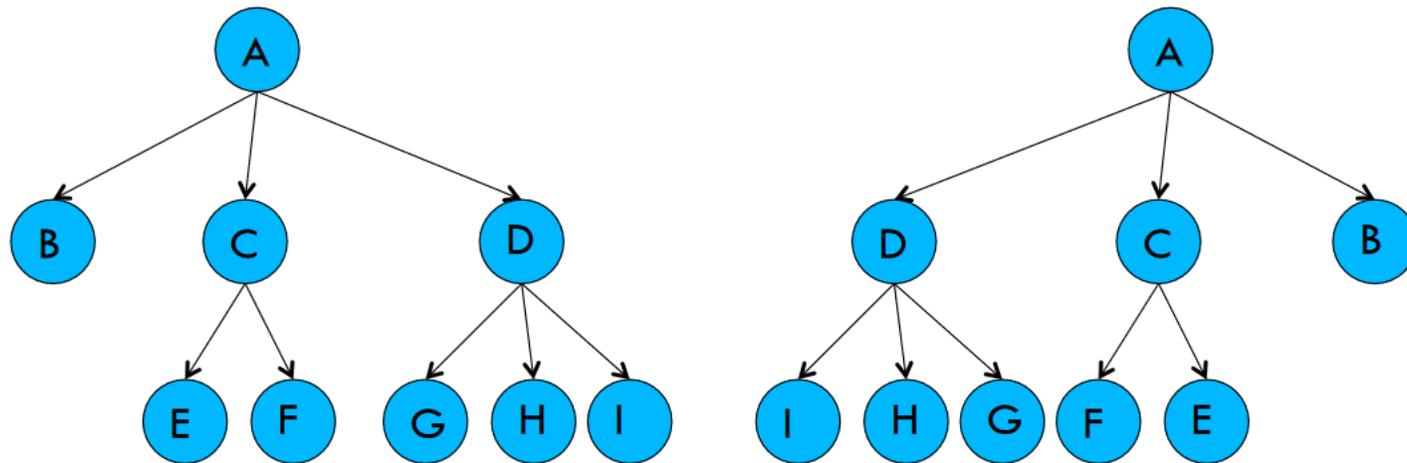
Representação Hierárquica:



# Ordenação

---

- Considerando as duas árvores abaixo:

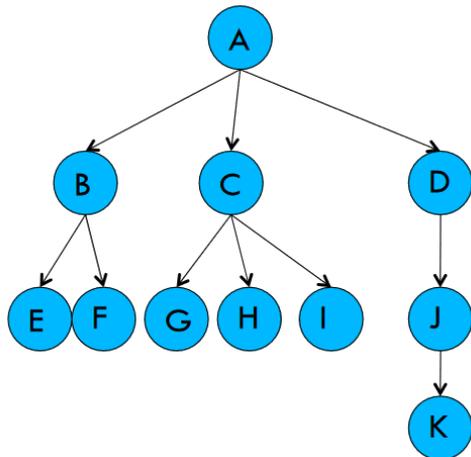


- A única diferença entre elas é a ordem das subárvores
  - Uma árvore ordenada é definida com uma árvore onde as subárvores formam um conjunto ordenado
  - Em uma árvore ordenada define-se o primeiro, segundo, até o último irmão, de acordo com alguma propriedade

# Vértices

---

- Os vértices da árvores estão classificados em níveis:
  - Nível é o número de nós entre o vértice e a raiz



Nível da raiz → 0

Nível de C → 1

Nível de K → 3

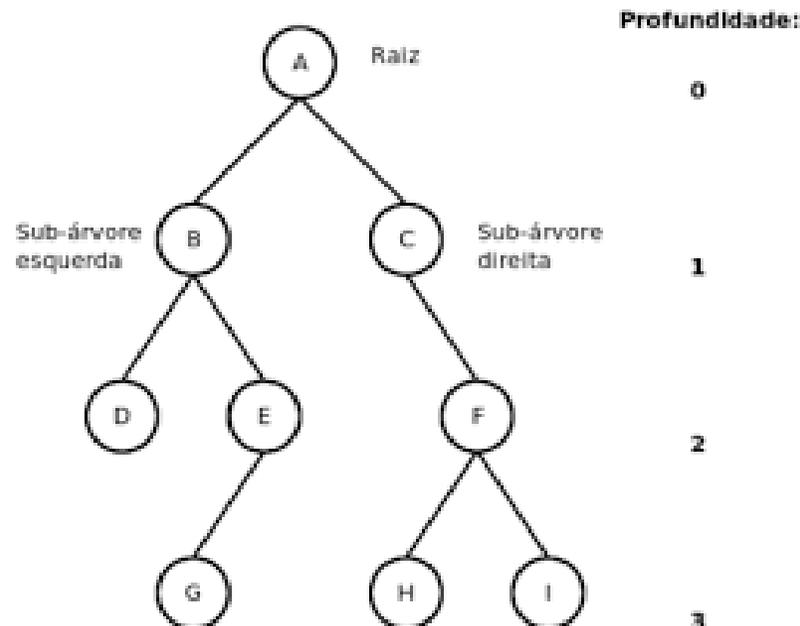
Nível de um nó qualquer → Nível de seu pai + 1

- A altura de uma árvore corresponde à maior distância entre a raiz e o maior nível
  - Árvore nula tem altura 0.
- Floresta é um conjunto de árvores
  - Se removermos a raiz e os arcos que a ligam às subárvores, temos uma floresta

# Árvores Binárias

---

- **Árvore nula ou com as seguintes características:**
  - Existe um nós especial denominado raiz
  - Nenhum nó tem grau superior a 2, ou seja, nenhum nó tem mais de 2 filhos
  - Existe um senso de posição, ou seja, distingue-se subárvore esquerda e subárvore direita



# Árvores Binárias

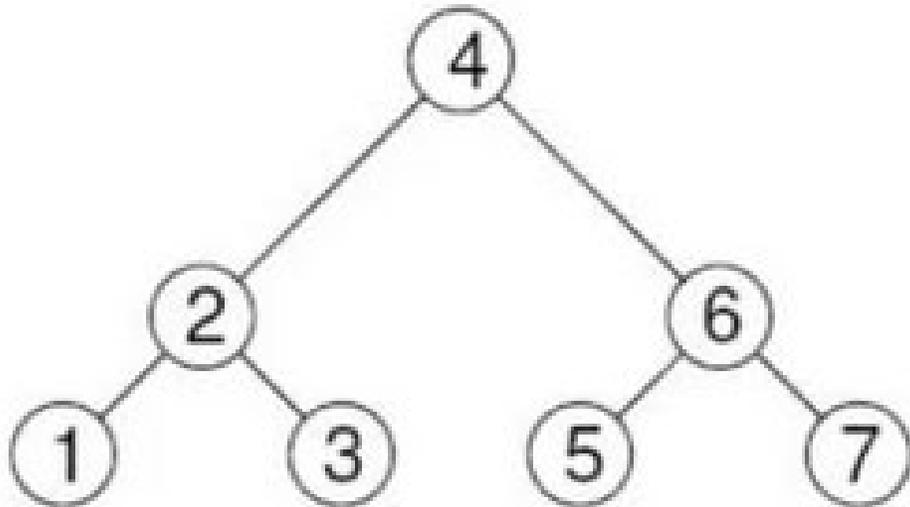
---

- Atravessamento ou caminhamento da árvore é a passagem, de forma sistemática, por um de seus nós:
- Existem formas diferentes de percorrer os nós de uma árvore:
  - Pré-ordem ou prefixa (Busca em profundidade)
  - Em ordem ou infixada (Ordem central)
  - Pós-ordem ou posfixa

# Árvores Binárias

---

- Atravessamento em pré-ordem (prefixa):
  - Visitar a raiz
  - Caminhar, recursivamente, na subárvore à esquerda
  - Caminhar, recursivamente, na subárvore à direita

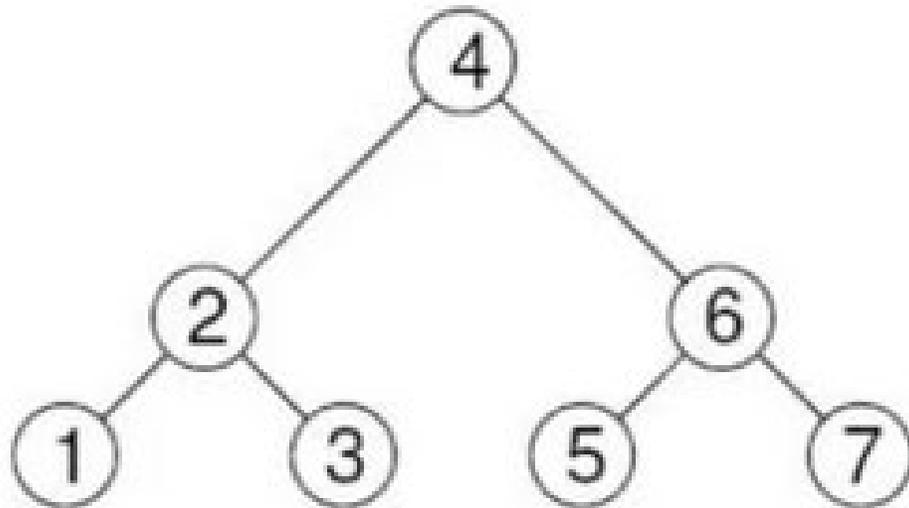


4, 2, 1, 3, 6, 5, 7

# Árvores Binárias

---

- Atravessamento em ordem (infixa):
  - Caminhar, recursivamente, na subárvore à esquerda
  - Visitar a raiz
  - Caminhar, recursivamente, na subárvore à direita

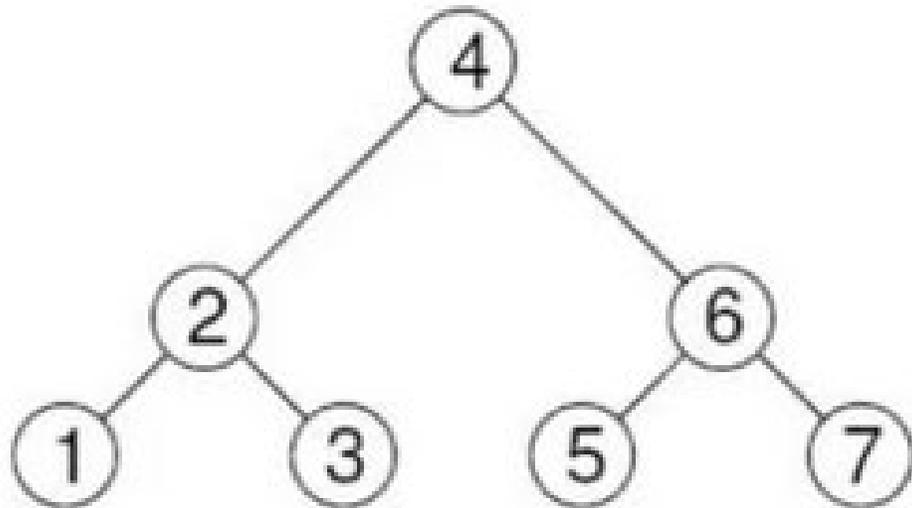


1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

# Árvores Binárias

---

- Atravessamento em pós-ordem (posfixa):
  - Caminhar, recursivamente, na subárvore à esquerda
  - Caminhar, recursivamente, na subárvore à direita
  - Visitar a raiz

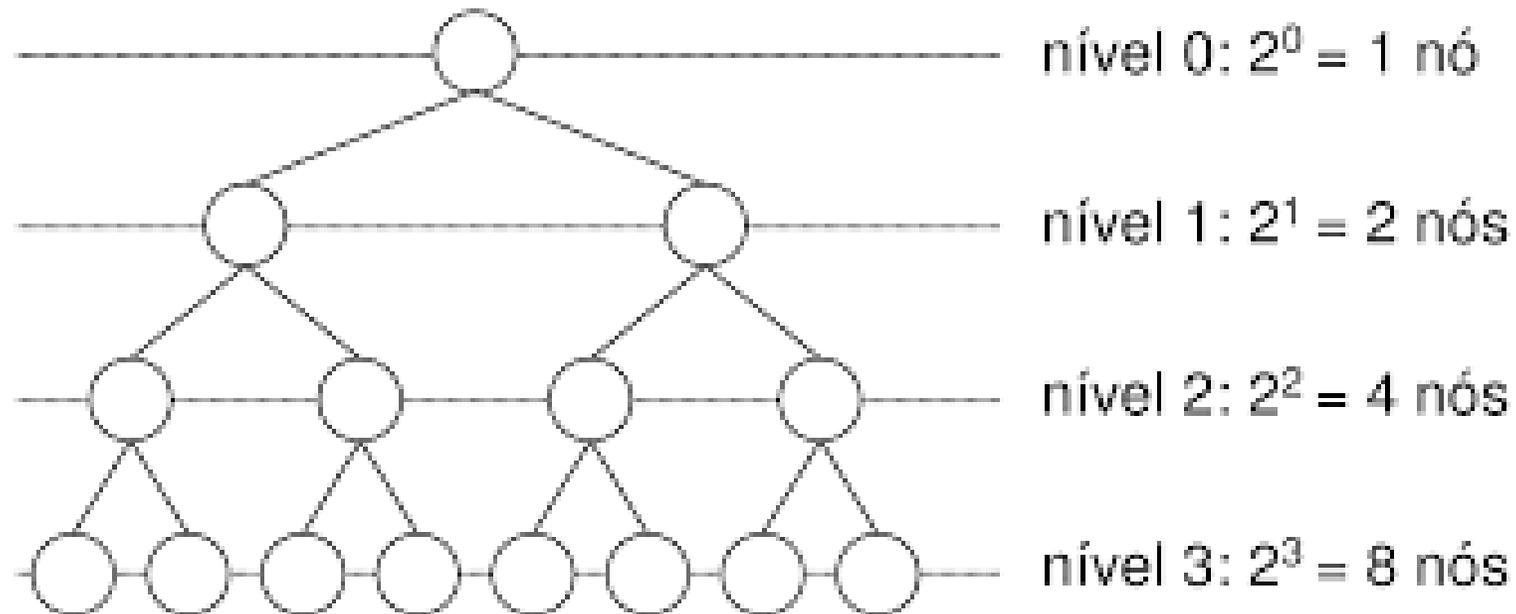


1, 3, 2, 5, 7, 6, 4

# Árvores Binárias

---

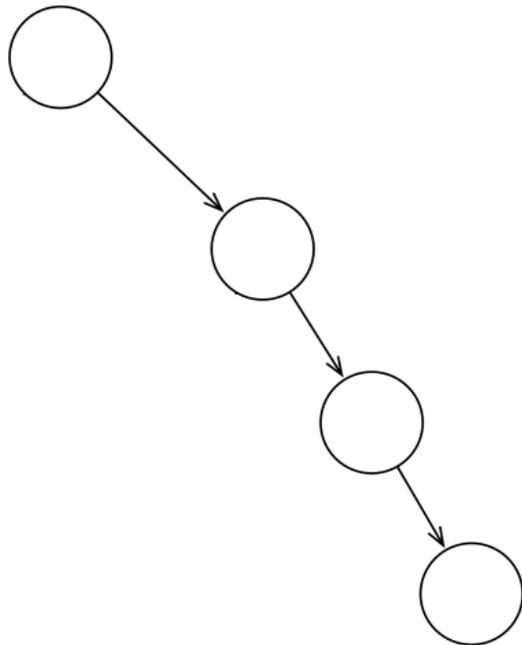
- Considera-se uma árvore binária cheia quando todos os nós (com exceção do último nível) possuem exatamente 2 nós



# Árvores Binárias

---

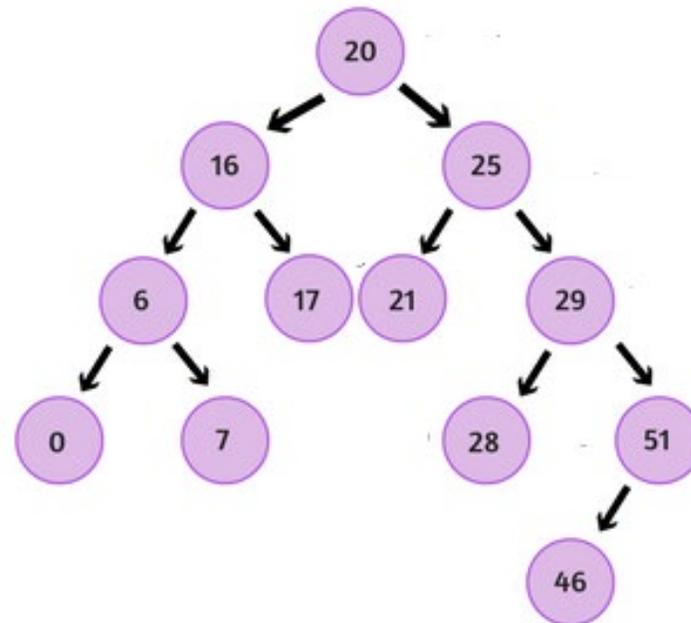
- Uma árvore binária é dita degenerada quando cada nó tem apenas 1 filho e o número de níveis é igual ao número de nós



# Árvores de Busca Binária

---

- Uma árvore é denominada **Árvore de Busca Binária** se:
  - **Todo** elemento da subárvore esquerda é menor que o elemento raiz
  - **Nenhum** elemento da subárvore direita é menor que o elemento raiz
  - As subárvores esquerda e direita também são de busca binária



# Árvores de Busca Binária

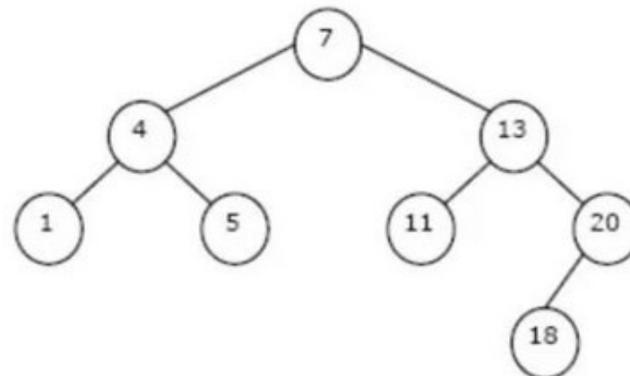
---

- Inserção

- Se a árvore está vazia, cria um novo nó e insere as informações do novo nó
- Se não está, compara a chave a ser inserida com a chave do nó analisado
  - Se menor, insere o valor na subárvore à esquerda
  - Se maior, insere o valor na subárvore à direita
  - Se igual, já existe

- Exemplo:

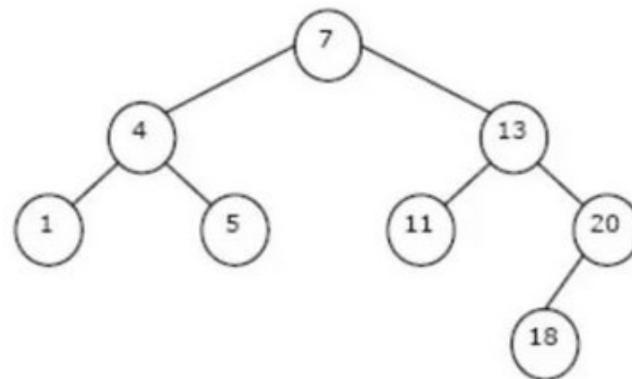
- Criar uma árvore de busca binária com os elementos : (7, 13, 20, 4, 1, 18, 5, 11)



# Árvores de Busca Binária

---

- Busca
  - Se o valor procurado for igual à raiz, o valor existe na árvore
  - Se não for, verificar:
    - Se menor, busca o valor na subárvore à esquerda, e assim, recursivamente, em todos os nós da subárvore
    - Se maior, busca o valor na subárvore à direita, e assim, recursivamente, em todos os nós da subárvore
  - A busca cessa se o valor for encontrado



# Árvores de Busca Binária

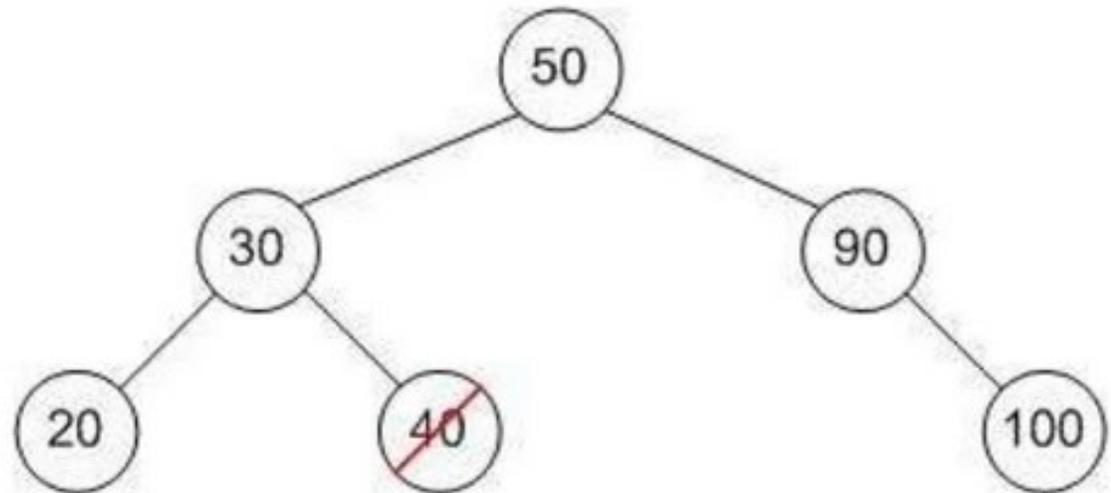
---

- Remoção
  - Processo complexo (Simplificá-lo pode implicar em perda massiva de dados)
  - Três possibilidades:
    - Remoção na folha
    - Remoção de um nó com 1 filho
    - Remoção de um nó com 2 filhos

# Árvores de Busca Binária

---

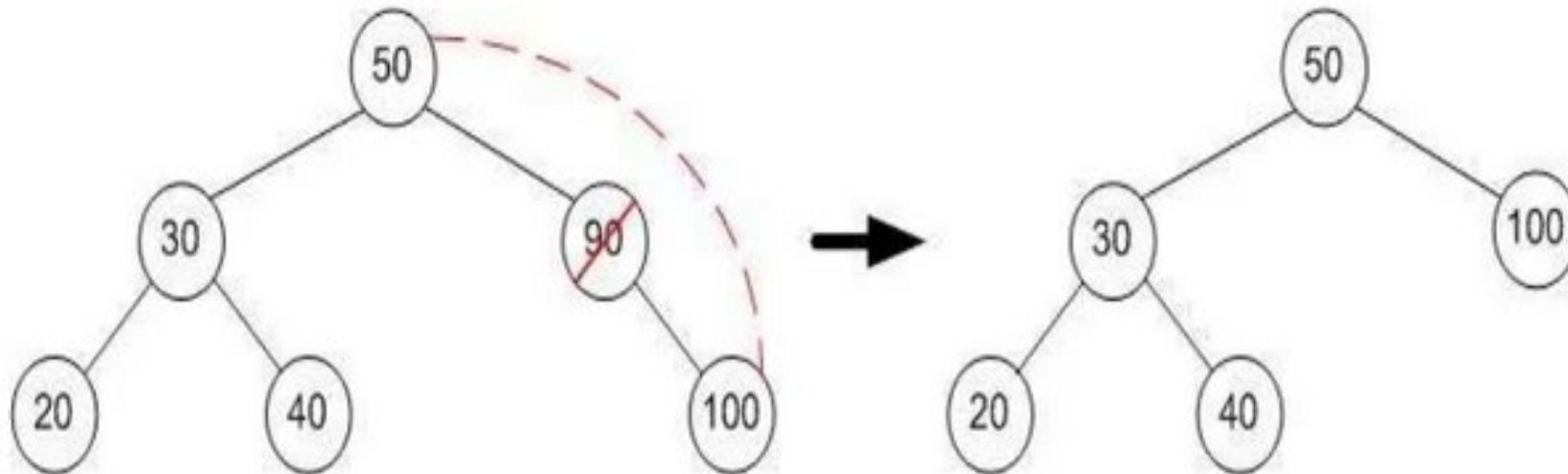
- Remoção na folha
  - Basta remover a folha da árvore
  - Se não for folha, todas as subárvores dela serão removidas junto
  - Exemplo:
    - Sistemas de Arquivos
    - Bancos de Dados Hierárquicos



# Árvores de Busca Binária

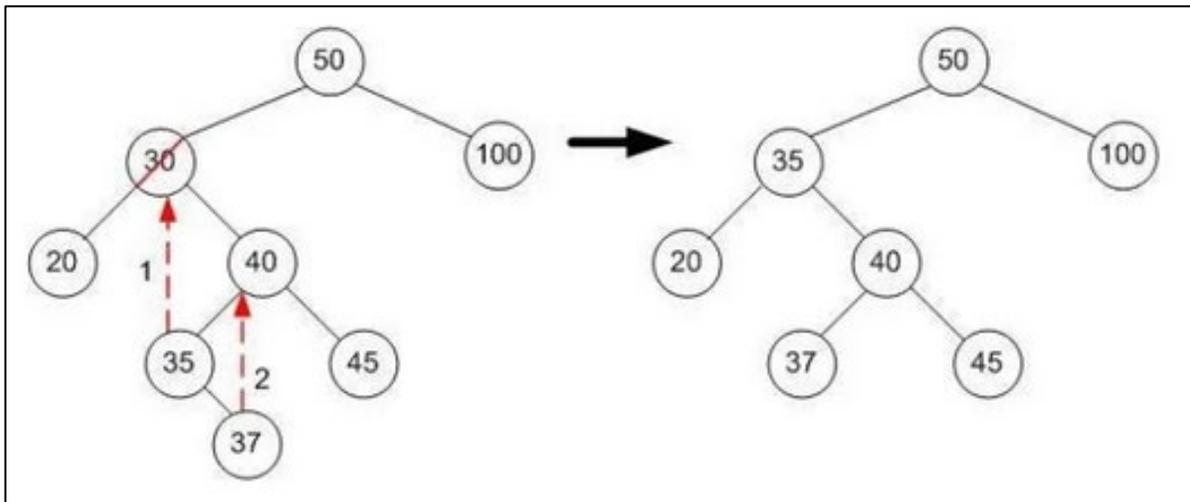
---

- Remoção de um nó com um filho
  - O filho sobe para a posição do pai

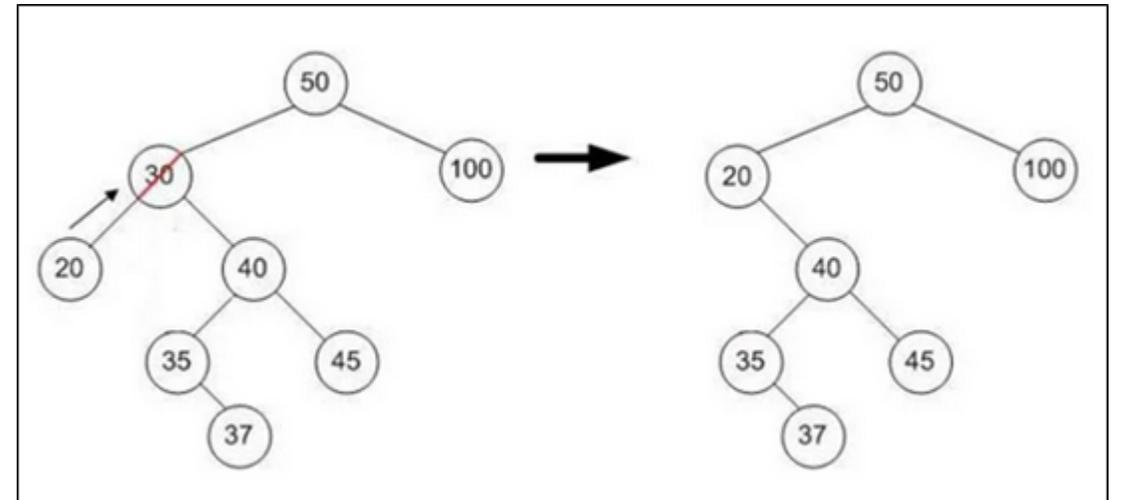


# Árvores de Busca Binária

- Remoção de um nó com dois filhos
  - Uma das duas estratégias pode ser adotada:
    - a) Substitui-se o nó pelo nó mais à esquerda da subárvore direita
    - b) Substitui-se o nó pelo nó mais à direita da subárvore esquerda



a)



b)